Задания областной олимпиады по геометрии

10 класс

ПЕРВАЯ ЛИГА

А.1 В треугольнике ABC медиана, проведенная к BC из вершины A в четыре раза меньше AB=8. Расстояние от точки B до медианы $4\sqrt{3}$. Найти периметр и площадь треугольника.

А.2 В параллелограмме $ABCD$ проведены диагонали AC и BD, которые пересекаются в точке O. Вершина C соединена с серединой AB отрезком CE, с серединой AD — отрезком CF. Отрезки CE и CF пересекают вторую диагональ в точках M и N, соответственно. Докажите, что BD разбита на три равных отрезка и укажите их.

А.3 Площадь диагональной плоскости куба равна S. Вычислите: ребро куба, диагональ основания, диагональ куба, площадь поверхности куба и его объем.

А.4 В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре вершины находятся на апофемах пирамиды и четыре — в плоскости основания; каждое ребро пирамиды равно a. Вычислить площадь полной поверхности и объем куба.

ВЫСШАЯ ЛИГА

В.1 На биссектрисе угла A треугольника ABC внутри него взяты точки D и F так, что углы DBC и FBA равны. Докажите, что:

a) углы DCB и FCA равны;
b) окружность, проходящая через D и F и касающаяся отрезка BC, касается окружности, описанной около треугольника ABC.

В.2 На плоскости расположены две непересекающиеся окружности равных диаметров. Проведены две прямые так, что прямые пересекают каждую окружность в четырех точках. Причем, все три отрезка на каждой прямой, образовавшиеся при пересечении с окружностью, равны. Для одной прямой эти отрезки имеют длину a, для другой — b ($a<b$). Найдите радиус окружностей.

В.3 Середина высоты правильного тетраэдра соединена отрезками с вершинами основания тетраэдра. Найдите плоский угол при вершине полученной пирамиды.