

Задания олимпиады по геометрии

2019 год

11 класс

(каждое задание – 7 баллов)

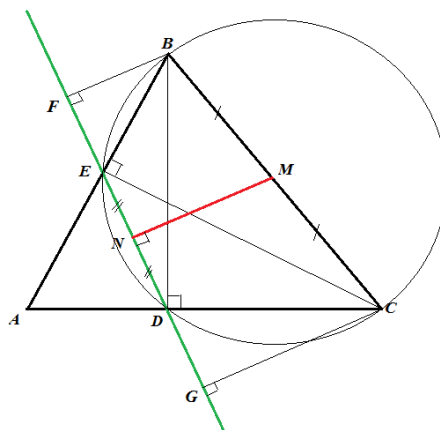
1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE . Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG . Известно, что $FG=7$, $DE=3$. Найдите EF .

Решение

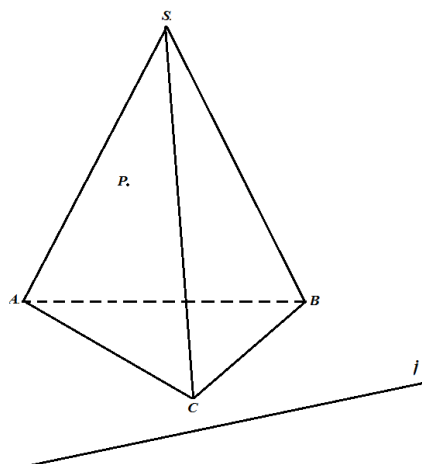
$BEDC$ – вписанный в окружность с диаметром BC и центром M . Опустим перпендикуляр из середины BC на ED – MN . Радиус MN , перпендикулярный хорде ED , делит ее пополам, то есть $EN=ND$.

MN – средняя линия прямоугольной трапеции $FBCG$, значит делит FG пополам. Окончательно получаем, $EF = \frac{7-3}{2} = 2$.

Ответ: 2.



2. Постройте сечение треугольной пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через точку P , принадлежащей грани ASC , и прямую j , лежащей в плоскости ABC . Процесс построения подробно опишите.



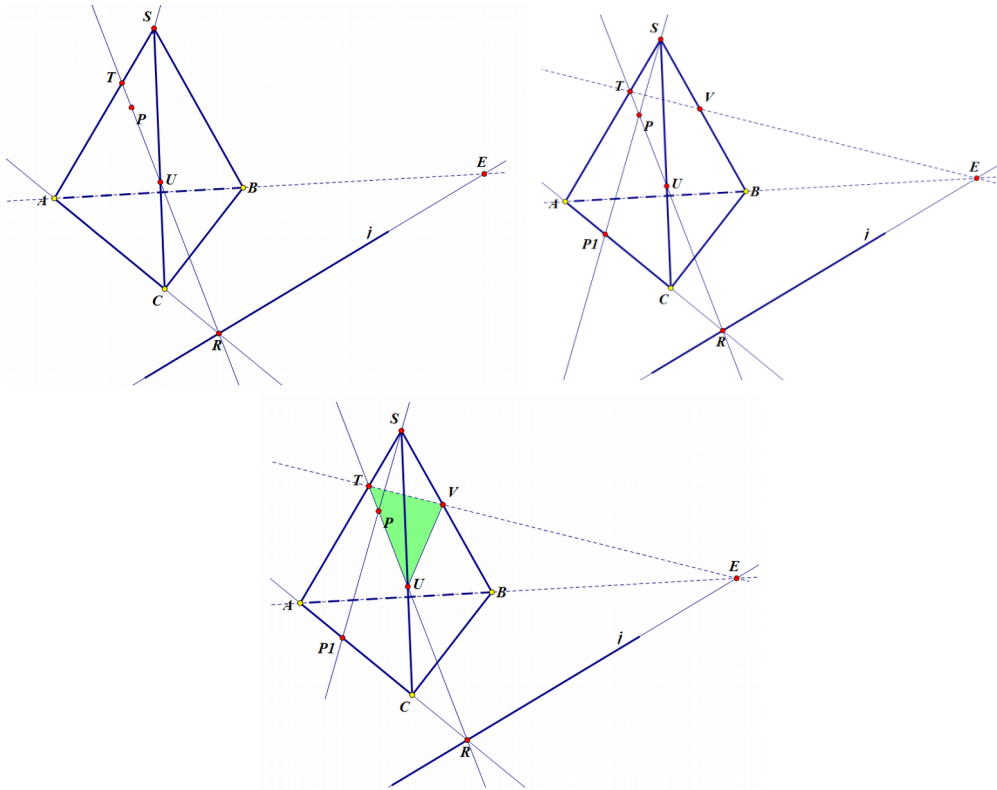
Решение.

- 1) Проводим прямую через точки P и R . Эта прямая – след секущей

плоскости в плоскости боковой грани ASC – пересечет ребро AS в точке T , а ребро SC – в точке U . Также проведем продолжение ребра AB до пересечения с прямой j – точки E .

2) Точки T и E лежат в одной плоскости – плоскости задней грани пирамиды, их можно соединить. Полученная прямая пересечет ребро SB в точке V .

3) Точки U, T, V соединяем отрезками и получаем искомое сечение.



3. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка E , и в треугольники ACE и ECB вписаны окружности (касаются сторон треугольников ACE и ECB), касающиеся отрезка CE в точках M и N . Найдите длину отрезка MN , если $AE=1$ и $BE=3$.

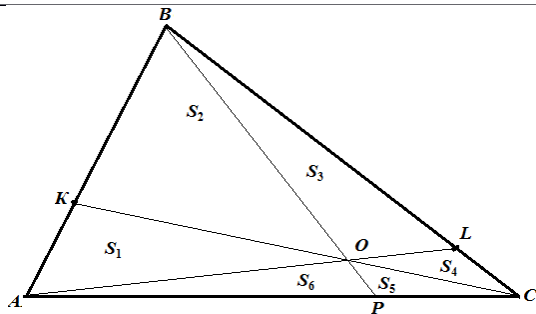
Решение

	Обозначим через K, L и M точки касания окружности, вписанной в треугольник EBC со сторонами EB, BC и CE, соответственно. Точки P, S и N – точки касания окружности, вписанной в треугольник EAC со сторонами AC, EA и CE, соответственно. Тогда: $EC + EB - BC = EM + \underline{MC} + EK + \underline{KB} - \underline{CL} - \underline{LB} = EM + EK = 2EM, \text{ поскольку } CL = CM, BL = BK \text{ и } EK = EM. \text{ Значит,}$ $EM = \frac{EC + EB - CB}{2}.$ Рассуждая аналогично, получаем, что $EN = \frac{EC + EA - CA}{2}.$ Но
--	---

$$NM = |EM - EN| = \frac{|EB - EA|}{2} = 1.$$

4. Дан треугольник ABC . На его сторонах AB и BC взяты точки K и L так, что $AK:KB=1:2$, $CL:LB=1:3$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке O . Прямая BO пересекает AC в точке P . Известно, что площадь треугольника AKO равна 1. Найдите площадь треугольников OSP и ABC .

Решение.



Введем обозначения, указанные на чертеже.

По условию $S_1=1$. Проведем BO до пересечения с AC . Точка пересечения – P .

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AK}{KB} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_2 = 2.$$

$$S_{\triangle AOB} = 3.$$

По теореме Менелая для треугольника ALB и прямой KC :

$$\frac{BK}{KA} \cdot \frac{AO}{OL} \cdot \frac{LC}{CB} = 1 \Rightarrow \frac{AO}{OL} = 2.$$

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_3} = \frac{AO}{OL} = 2 \Rightarrow S_3 = \frac{3}{2}.$$

$$\frac{S_3}{S_4} = \frac{BL}{LC} = \frac{3}{1} \Rightarrow S_4 = \frac{1}{2}.$$

$$S_{\triangle BOC} = S_3 + S_4 = 2.$$

$$S_{\triangle KBC} = S_{\triangle BOC} + S_2 = 4.$$

$$\frac{S_{\triangle KBC}}{S_{\triangle AKC}} = \frac{2}{1} \Rightarrow S_{\triangle AKC} = 2.$$

$$S_{\triangle AOC} = S_{\triangle AKC} - S_1 = 1.$$

По теореме Чевы в треугольнике ABC :

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{CP}{PA} = \frac{2}{3}.$$

По теореме Менелая для треугольника PBC и прямой AL :

$$\frac{CL}{LB} \cdot \frac{BO}{OP} \cdot \frac{AP}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{BO}{OP} = \frac{5}{1}.$$

$$\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle POC}} = \frac{5}{1} \Rightarrow S_{\triangle POC} = \frac{2}{5}.$$

$$\frac{S_{\triangle APO}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{1}{5} \Rightarrow S_{\triangle AOP} = \frac{3}{5}.$$

$$S_{\triangle ABC} = 6.$$

Ответ: $\frac{2}{5}$ и 6.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые ребра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой

BD .

Решение.

1. Построим указанное сечение.

MO – высота пирамиды, S – середина MA .

Так как S и C принадлежат сечению, то SC принадлежит сечению.

Тогда $SC \cap MO = Q \in$ сечению.

Проведем KL через Q , параллельно BD .

$KL \cap MB = K, KL \cap MD = L \Rightarrow SKCL$ – искомое сечение.

2. QC – наклонная, $QO \perp OC$. OC – проекция QC .

$$BD \perp OC \Rightarrow BD \perp QC$$

$$BD \parallel KL \Rightarrow KL \perp QC \Rightarrow KL \perp SC \Rightarrow S_{SKCL} = \frac{1}{2} KL \cdot SC.$$

3. $SH \perp AC, MO \perp AC \Rightarrow SH \parallel MO \Rightarrow AS = SM$,

$$SH - \text{средняя линия } \triangle AMO \Rightarrow SH = \frac{1}{2} MO = \frac{1}{2} \sqrt{AM^2 - AO^2} = 3\sqrt{14}.$$

$$AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} AD \sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

$$SH = \frac{3}{2} \sqrt{14} \Rightarrow HO = \frac{1}{2} AO = \frac{3}{2} \sqrt{2}.$$

$$CH = \frac{9}{2} \sqrt{2}.$$

$$SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = 6\sqrt{2}.$$

4. $\triangle MBD \sim \triangle MKL \Rightarrow KL = \frac{BD \cdot MQ}{MO}.$

$$\triangle SHC \sim \triangle QOC \Rightarrow OQ = \frac{CH \cdot HC}{CO} = \frac{9}{4} \sqrt{14}.$$

$$MQ = MO - OQ = \frac{3}{4} \sqrt{14}.$$

$$KL = \frac{3}{2} \sqrt{2}.$$

5. $S_{SKCL} = 9.$