

Задания олимпиады по геометрии

2019 год

8 класс

(каждое задание – 7 баллов)

- На прямой расположены пять точек. Все попарные расстояния между ними в порядке возрастания - это 2, 4, 5, 7, 8, k , 13, 15, 17, 19. Определите значение k .

Решение

Пусть пять точек – это A, B, C, D, E в порядке возрастания. Самое большое расстояние – 19 – это между крайними точками A и E , то есть $AE=19$. Расстояние 17 и 15 могут быть только расстояния AD и BE , так как любое из других расстояний между парами точек меньше одного из них. Пусть $BE=17$, $AD=15$, тогда $AB=2$, $DE=4$. Но тогда $BD=13$. Если $AC=5$, тогда $BC=3$, такого быть не может. $CE=5$ тоже не может, так как тогда бы $CD=1$, но такого расстояния нет. Если $CD=5$, то $BC=8$ и среди расстояний нет расстояния 7. Значит $BC=5$, тогда $CD=8$, $CE=8+4=12$ – отсутствующее расстояние.

AB	DE	BC	CD	AC	AD	BD	BE	CE	DE	AB+BC	AB+BC+CD	AB+BC+CD+DE	BC+CD	BC+CD+DE	CD+DE
2	4	5	8	7	15	13	17	12	4	AC	AD	AE	BD	BE	CE

Ответ: 12.

- Тимофей резал бумажный треугольник на кусочки (все разрезы - прямые). Сначала он разрезал этот треугольник на две части. Потом разрезал на два куса одну из полученных частей, и так далее. Когда ему надоело резать, оказалось, что общее количество углов у всех получившихся фигур равно 2015. Какое наименьшее количество разрезов мог сделать Тимофей?

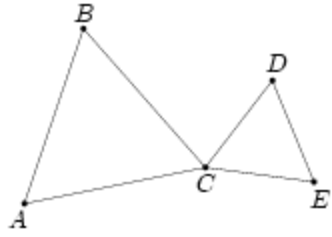
Решение

При разрезании выпуклого многоугольника прямым разрезом получаются два многоугольника. При этом могут образоваться не более четырех новых углов, то есть, суммарное количество углов в образовавшихся многоугольниках превышает количество углов первоначального многоугольника не более, чем на 4. Поскольку $2015=3+503*4$, то Тимофею хватит 503 разреза (а меньшего количества разрезов не хватило бы).

Ответ: 503.

- Два равносторонних треугольника ABC и CDE имеют общую вершину (см. рисунок). Найдите угол (в градусах) между прямыми AD и BE (углом

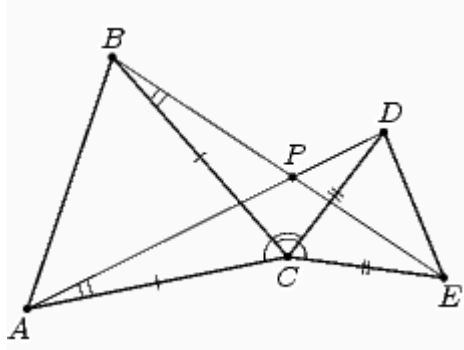
между двумя пересекающимися прямыми называется острый угол, образованный при пересечении).



Решение

Треугольники ACD и BCE равны по первому признаку. Действительно, $AC=BC$, $CD=CE$ и $\angle DCA=60^\circ+\angle BCD=\angle ECA$. Значит, $\angle CAD=\angle CBE$.

Тогда $\angle BPA=180^\circ-\angle ABP-\angle PAB=180^\circ-(60^\circ+\angle CBE)-(60^\circ-\angle CAD)=60^\circ$.

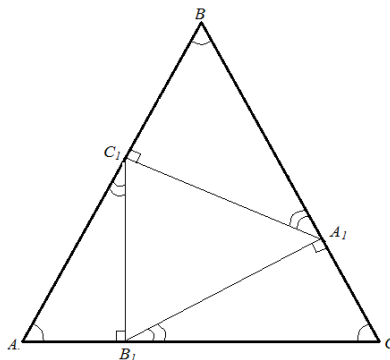


Альтернативное рассуждение. При повороте вокруг точки C на 60 градусов точка E перейдет в точку D , а точка B перейдет в точку A . Значит, отрезок BE перейдет в отрезок AD . Потому и угол между ними равен 60 градусам.

Ответ: 60°

4. На сторонах AB , BC и CA равностороннего треугольника ABC взяты точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно, причем так, что $B_1C_1 \perp AC$, $A_1C_1 \perp AB$, $B_1A_1 \perp BC$. Найдите $A_1B:A_1C$.

Решение



Все углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны по 60° , так как $\angle BA_1C_1=90^\circ-\angle ABC=30^\circ$, а $\angle B_1A_1C_1=180^\circ-\angle BA_1C_1-\angle B_1A_1C=60^\circ$. Остальные углы вычисляются аналогично.

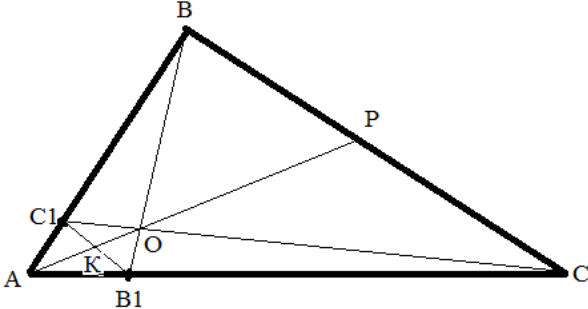
Следовательно, треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний, откуда получаем, что $\triangle AC_1B_1=\triangle BA_1C_1=\triangle CB_1A_1$ по катету ($B_1C_1=C_1A_1=A_1B_1$) и острому углу ($\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$).

Поскольку $\angle BA_1C_1 = 30^\circ$, катет напротив этого угла вдвое меньше гипотенузы, то есть $A_1B = 2BC_1$, причем $BC_1 = CA_1$ ввиду равенства указанных выше трех прямоугольных треугольников. Отсюда следует, что $A_1B : A_1C = 2:1$.

Ответ: 2:1.

5. На сторонах AC и AB треугольника ABC лежат точки B_1 и C_1 соответственно, так что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Точка пересечения BB_1 и CC_1 – точка O . Докажите, что прямая AO делит BC пополам.

Решение

	$\begin{aligned} \Delta C_1KO &\sim \Delta OPC, \frac{C_1K}{PC} = \frac{KO}{OP} \\ \Delta B_1KO &\sim \Delta OBP, \frac{B_1K}{PB} = \frac{KO}{OP} \\ \frac{C_1K}{PC} &= \frac{B_1K}{PB} \Rightarrow C_1K = \frac{PC \cdot B_1K}{PB} \\ \Delta C_1KA &\sim \Delta APB, \frac{C_1K}{BP} = \frac{KA}{AP} \\ \Delta B_1KA &\sim \Delta APC, \frac{B_1K}{CP} = \frac{KA}{AP} \\ \frac{C_1K}{BP} &= \frac{B_1K}{CP} \Rightarrow C_1K = \frac{BP \cdot B_1K}{PC} \\ \frac{PC \cdot B_1K}{PB} &= \frac{BP \cdot B_1K}{PC} \\ \frac{PB}{PB^2} &= \frac{PC}{PC^2} \Rightarrow PB = PC \end{aligned}$
---	--