

Задания олимпиады по геометрии

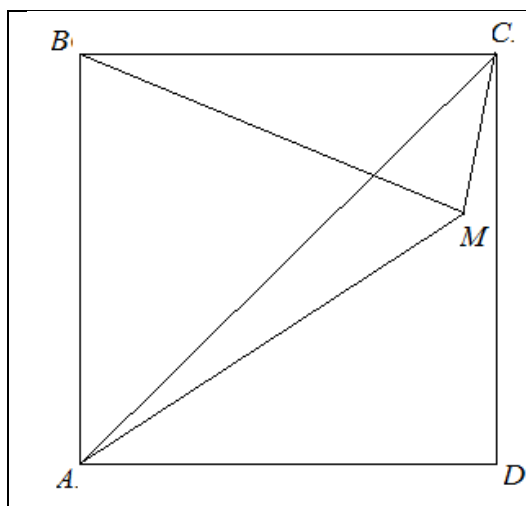
2019 год

10 класс

(каждое задание – 7 баллов)

1. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle MAC = \angle MCD = 14^\circ$. Найдите величину угла ABM .

Решение.

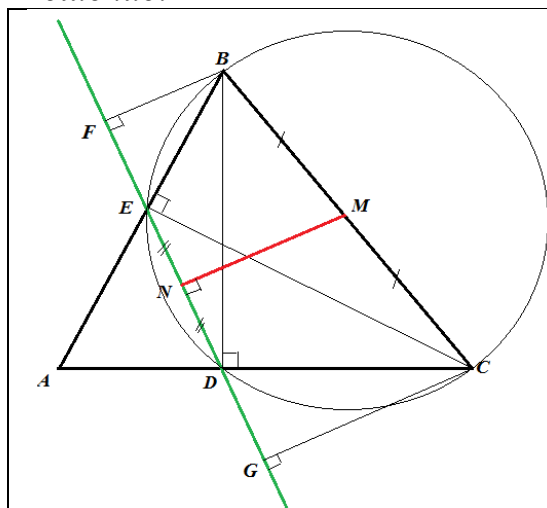


Если точка M лежит внутри треугольника ABC , то $\angle MAC < 45^\circ < \angle MCD$. Точка M не может лежать на сторонах треугольников ABC и ACD , поэтому она лежит внутри $\triangle ACD$. При этом, $\angle AMC = 180^\circ - \angle MAC - (45^\circ - \angle MCD) = 135^\circ$. Это означает, что т. M лежит на дуге окружности радиуса AB с центром B ($2(\angle AMC - 90^\circ) = 90^\circ = \angle B, BA = BC$). Воспользовавшись теоремой о вписанном угле, получаем: $\angle ABM = 2\angle ACM = 90^\circ - 2\alpha = 62^\circ$.

Ответ: 62° .

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE . Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG . Известно, что $FG=7$, $DE=3$. Найдите EF .

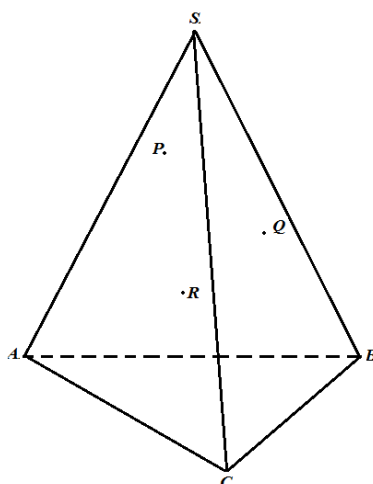
Решение.



$BEDC$ – вписанный в окружность с диаметром BC и центром M . Опустим перпендикуляр из середины BC на ED – MN . Радиус MN , перпендикулярный хорде ED , делит ее пополам, то есть $EN=ND$. MN – средняя линия прямоугольной трапеции $FBCG$, значит делит FG пополам. Окончательно получаем, $EF = \frac{7-3}{2} = 2$.

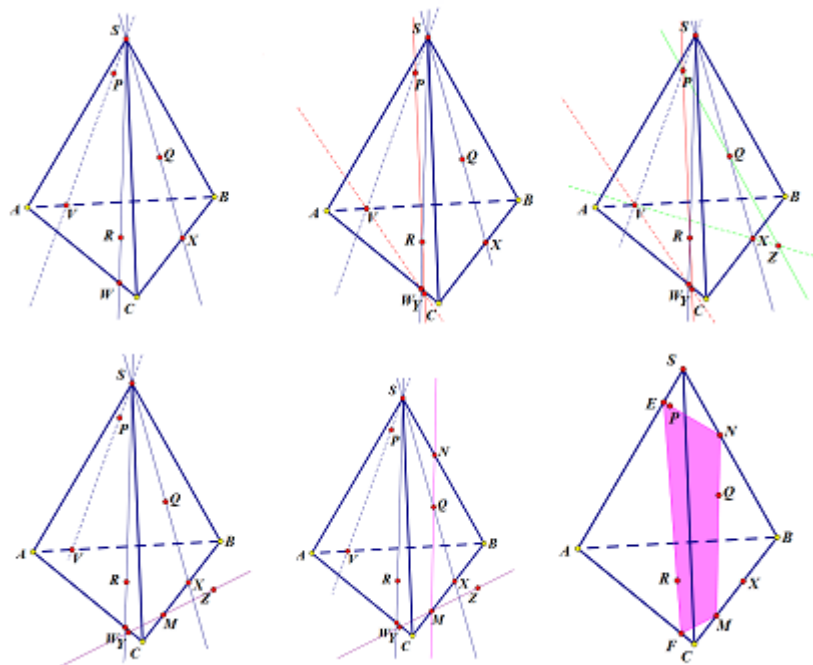
Ответ: 2.

3. Постройте сечение треугольной пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через точки P , R и Q , если P принадлежит грани ASB , R принадлежит грани ASC , Q принадлежит грани CSB . Процесс построения подробно опишите.



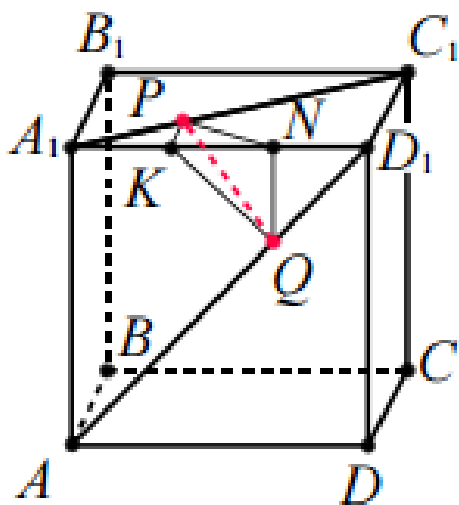
Решение.

- 1) $SP \cap AB = V, SR \cap AC = W, SQ \cap CB = X$.
- 2) Проводим прямую PR и ее след в плоскости ABC – VW . Точка их пересечения Y – место прокола прямой RP плоскости ABC .
- 3) Аналогично получаем точку прокола прямой PQ с плоскостью ABC – точку Z .
- 4) Проводим прямую YZ . Ее пересечение с ребром BC даст точку M .
- 5) Проводим прямую MQ . Ее пересечение с ребром SB – точка N .
- 6) Проводим прямую через N и P . Ее пересечение с ребром AS даст точку E . Проводим прямую ER до пересечения с AC и получаем точку F . $MNEF$ – искомое сечение.



4. Найти расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, длина ребра которого равна $\sqrt{3}$.

Решение.



1 решение.

Найдем расстояние между диагоналями A_1C_1 и AD_1 куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$. Пусть отрезок PQ есть общий перпендикуляр скрещивающихся прямых A_1C_1 и AD_1 , а PN и KQ — его ортогональные проекции на плоскости $A_1B_1C_1$ и AA_1D_1 соответственно ($PK \perp A_1D_1, QN \perp A_1D_1$). На основании теоремы о трех перпендикулярах $PN \perp A_1C_1, KQ \perp AD_1$. Треугольники A_1PN и KQD_1 — прямоугольные и равнобедренные, поэтому $A_1K = KN = ND_1 = \frac{a}{3}$. Аналогично,

$$NQ = ND_1 = A_1K = KP = \frac{a}{3}, A_1P = PN = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Тогда из прямоугольного треугольника PNQ получим расстояние между A_1C_1 и AD_1 :

$$PQ = \sqrt{PN^2 + NQ^2} = 1$$

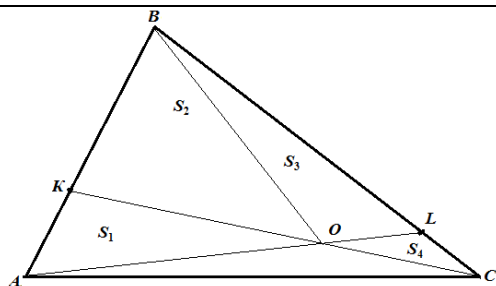
2 решение.

Искомое расстояние равно расстоянию между параллельными плоскостями A_1C_1B и AD_1C , которые перпендикулярны диагонали куба и делят ее на три равные части.

Ответ: 1.

5. Дан треугольник ABC . На его сторонах AB и BC взяты точки K и L так, что $AK:KB=1:2$, $CL:LB=1:3$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке O . Известно, что площадь треугольника AKO равна 1. Найдите площадь треугольника AOC .

Решение.



Введем обозначения, указанные на чертеже.

По условию $S_1 = 1$. Проведем BO .

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AK}{KB} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_2 = 2.$$

$$S_{\Delta AOB} = 3.$$

По теореме Менелая для треугольника ALB и прямой KC :

$$\frac{BK}{KA} \cdot \frac{AO}{OL} \cdot \frac{LC}{CB} = 1 \Rightarrow \frac{AO}{OL} = 2.$$

$$\frac{S_{\Delta AOB}}{S_3} = \frac{AO}{OL} = 2 \Rightarrow S_3 = \frac{3}{2}.$$

$$\frac{S_3}{S_4} = \frac{BL}{LC} = \frac{3}{1} \Rightarrow S_4 = \frac{1}{2}.$$

$$S_{\Delta BOC} = S_3 + S_4 = 2.$$

	$S_{\Delta KBC} = S_{\Delta BOC} + S_2 = 4.$ $\frac{S_{\Delta KBC}}{S_{AKC}} = \frac{2}{1} \Rightarrow S_{AKC} = 2.$ $S_{AOC} = S_{AKC} - S_1 = 1.$
--	---

Ответ: 1.