

Задания олимпиады по геометрии

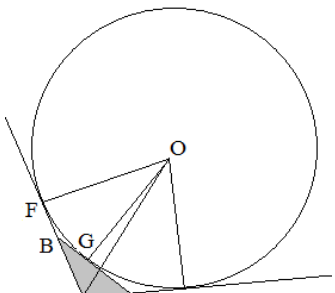
2019 год

9 класс

(каждое задание – 7 баллов)

1. Угол при вершине A треугольника ABC равен 120° . Окружность касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC . Известно, что периметр треугольника ABC равен 10, найдите расстояние от вершины A до центра окружности. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности.

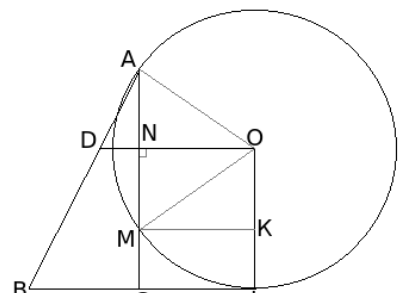
Решение.

	$2AF = AF + AH = AB + BF + AC + CH =$ $= AB + BG + AC + GC = AB + BC + AC$ $AF = AH = 0,5P = 5$ Угол при вершине A треугольника ABC равен 120°, значит угол $OA H = 60^\circ$, следовательно, $AO = 2AH = 10$
---	--

Ответ: 10.

2. Окружность с центром O и радиусом равным 13 проходит через вершину A прямоугольного треугольника ABC , пересекает его катет AC в точке M и касается прямой BC . Расстояние от M до BC равно 6,5. Точка D лежит на гипотенузе $AB=20$ и $AD:DB=1:2$. Найдите расстояние от точки D до катета AC .

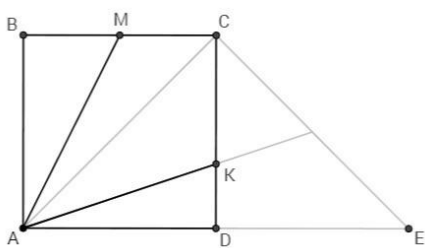
Решение.

	$MK = \sqrt{OM^2 - OK^2} = \frac{13\sqrt{3}}{2} = ON$ $MN = \sqrt{OM^2 - ON^2} = \frac{13}{2} = MC = AN$ $AN:CN = 1:2$, то есть $DO \parallel BC$. $DN:BC = 1:2$. $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \frac{\sqrt{79}}{2}$, следовательно, $DN = \frac{\sqrt{79}}{4}$.
---	--

Ответ: $\frac{\sqrt{79}}{4}$.

3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно так, что $2BM=3DK=AB$. Найдите $\angle KAM$. В ответе укажите его градусную величину.

Решение.



Построим $\triangle ACE$, $AD=DE$. $\triangle ACE$ подобен $\triangle ABC$.

CD - медиана и высота, $\triangle ACE$ - равнобедренный с углами при основании 45° (диагонали квадрата делят его углы пополам).

$CK:DK=2:1 \Rightarrow K$ - точка пересечения медиан $\Delta ACE \Rightarrow AK$ - медиана ΔACE .

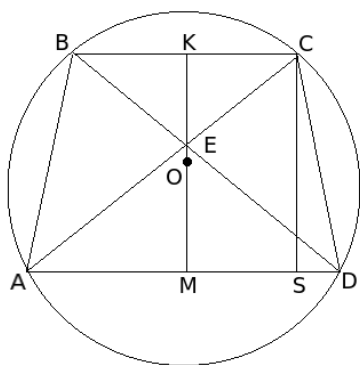
AM - медиана $\triangle ABC$. В подобных треугольниках соответствующие углы равны. $\angle CAM = \angle DAK$. $\angle KAM = \angle KAC + \angle CAM = \angle KAC + \angle DAK = 45^\circ$.

Ответ: 45° .

4. В окружность радиуса 5 вписана трапеция с основаниями 6 и 8. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей.

Решение.

Случай 1



$$KO = \sqrt{CO^2 - KC^2} = 4$$

$$OM = \sqrt{OD^2 - MD^2} = 3$$

$$KM = CS = KO + OM = 7$$

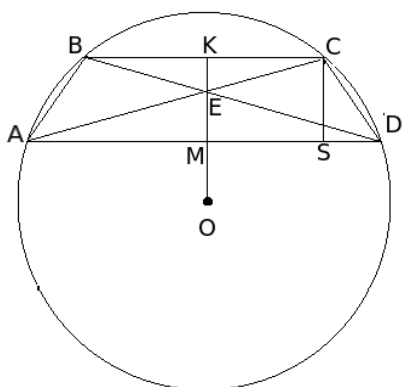
$$AS = AD - \frac{AD - BC}{2} = 7$$

$$AC = \sqrt{AS^2 + CS^2} = 7\sqrt{2}$$

$$tgACS = \frac{AS}{CS} = 1, ACS = 45^0, BCA = 45^0$$

Следовательно, треугольник BEC — прямоугольный и равнобедренный, значит $KE=KC=3$, откуда $EO=KO-KE=1$.

Случай 2



$$KO = \sqrt{CO^2 - KC^2} = 4$$

$$OM = \sqrt{OD^2 - MD^2} = 3$$

$$KM = CS = KO - OM = 1$$

$$AS = AD - \frac{AD - BC}{2} = 7$$

$$tgACS = \frac{AS}{CS} = 7, KCE = 90^0 - ACE,$$

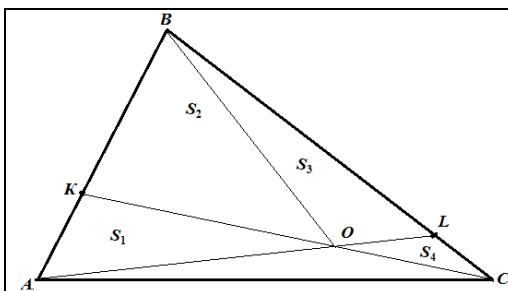
$$tgKCE = ctgACS = \frac{1}{7} = \frac{KE}{KC} = \frac{KE}{3},$$

$$KE = \frac{3}{7}, EO = KO - KE = \frac{25}{7}$$

Ответ: 1 или $\frac{25}{7}$.

5. Дан треугольник ABC . На его сторонах AB и BC взяты точки K и L так, что $AK:KB=1:2$, $CL:LB=1:3$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке O . Известно, что площадь треугольника AKO равна 1. Найдите площадь треугольника AOC .

Решение.



Введем обозначения, указанные на чертеже.

По условию $S_1 = 1$. Проведем BO .

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AK}{KB} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_2 = 2.$$

$$S_{\Delta AOB} = 3.$$

По теореме Менелая для треугольника ALB и прямой KC :

$$\frac{BK}{KA} \cdot \frac{AO}{OL} \cdot \frac{LC}{CB} = 1 \Rightarrow \frac{AO}{OL} = 2.$$

$$\frac{S_{\Delta AOB}}{S_3} = \frac{AO}{OL} = 2 \Rightarrow S_3 = \frac{3}{2}.$$

$$\frac{S_3}{S_4} = \frac{BL}{LC} = \frac{3}{1} \Rightarrow S_4 = \frac{1}{2}.$$

$$S_{\Delta BOC} = S_3 + S_4 = 2.$$

$$S_{\Delta KBC} = S_{\Delta BOC} + S_2 = 4.$$

$$\frac{S_{\Delta KBC}}{S_{AKC}} = \frac{2}{1} \Rightarrow S_{AKC} = 2.$$

$$S_{AOC} = S_{AKC} - S_1 = 1.$$

Ответ: 1.