Учебно-методические материалы

Областное государственное автономное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования
«Институт повышения квалификации педагогических работников»
ОГАОУ ДПО «ИПКПР»

Учебно-методические рекомендации

Банковские задачи на проценты

Биробиджан, 2017

Учебно-методические рекомендации «Банковские задачи на проценты». – Биробиджан: ОГАОУ ДПО «ИПКПР», 2017. – 41 с.

Учебно-методические рекомендации «Банковские задачи на проценты» рекомендованы к печати и практическому применению в ОУ Еврейской автономной области решением регионального учебно-методического объединения от 21 декабря 2016 года, № 04.

Составитель:

Бабинер Е.С., старший преподаватель кафедры общего образования и воспитания ОГАОУ ДПО «ИПКПР»

Эксперты:

Хавинсон М.Ю., к.экон.н., ст.н.с., ФГБУН «ИКАРП» ДВО РАН (г. Биробиджан)

Одоевцева И.В., старший преподаватель, ФГБОУ ВПО «ПГУ им. Шолом-Алейхема» (г. Биробиджан)

Ответственный за выпуск:

Корниенко Е.Л., заведующая редакционно-издательским отделом ОГАОУ ДПО «ИПКПР»

Компьютерная верстка:

Бабинер Е.С., старший преподаватель кафедры общего образования и воспитания ОГАОУ ДПО «ИПКПР»

В учебно-методических рекомендациях классифицированы наиболее часто встречающиеся задачи банковской направленности, представлены выводы основных формул и решения задач.

Содержание

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

k – счетчик конверсионных периодов (периодов начисления);
$n -$ количество конверсионных периодов;
$S_k -$ наращенная сумма на начало конверсионного периода;
$V_k -$ выплата части долга (взнос);
$D_k -$ сумма долга на конец конверсионного периода перед начислением процентов для задач на кредиты (наращенная сумма на конец конверсионного периода после начисления процентов для задач на вклады);
$r -$ процентная ставка в десятичном выражении;
$\Sigma_n -$ сумма всех выплат (взносов);
Также будут полезными следующие равенства для задач на кредиты:
$S_0 = D_0$;
$S_n = \tilde{V}$, где $\tilde{V}$ – последняя выплата (для кредитов);
$D_n = S_n - \tilde{V} = 0$ (для кредитов).

КРЕДИТЫ

1. Равные взносы

Ключевые фразы в условии задачи:

- «***равные платежи***»;
- «***каждый год (месяц) выплачивается одна и та же сумма***».

Для выявления закономерности составим таблицу:

k	S_k	V_k	D_k
0	S_0		$D_0 = S_0$
1	$S_1 = D_0(1+r) = S_0(1+r)$	V	$D_1 = S_1 - V = S_0(1+r) - V$
2	$S_2 = D_1(1+r) = S_0(1+r)^2 - V(1+r)$	V	$D_2 = S_0(1+r)^2 - V(1+r) - V$
3	$S_3 = S_0(1+r)^3 - V(1+r)^2 - V(1+r)$	V	$D_3 = S_0(1+r)^3 - V(1+r)^2 - -V(1+r) - V$
4	$S_4 = S_0(1+r)^4 - V(1+r)^3 - -V(1+r)^2 - V(1+r)$	V	$D_4 = S_0(1+r)^4 - V(1+r)^3 - -V(1+r)^2 - V(1+r) - V$

Таким образом, рекуррентная формула для S_n имеет вид:

$$S_n = S_0(1+r)^n - V(1+r)^{n-1} - V(1+r)^{n-2} - \cdots - V(1+r),$$

$$S_n = S_0(1+r)^n - V\big((1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \cdots + (1+r)\big).$$

$(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \cdots + (1+r) -$ это сумма $n-1$ членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1+r$, заменим ее, используя формулу:

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}.$$

Получается, что последняя наращенная сумма определяется формулой:

$$S_n = S_0(1+r)^n - V \cdot \frac{(1+r)^n - (1+r)}{r}. \qquad (1.1)$$

Для D_k рекуррентная формула, с учетом формулы суммы членов геометрической прогрессии, имеет вид:

$$D_k = S_0(1+r)^k - V\frac{(1+r)^k - 1}{r}. \qquad (1.2)$$

Так как последний член последовательности долгов $D_n = 0$, то:

$$S_0(1+r)^n - V\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0,$$

откуда формула для вычисления размера взноса имеет вид:

$$V = \frac{S_0 \cdot r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}. \qquad (1.3)$$

Формула для вычисления S_0:

$$S_0 = V\frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}. \qquad (1.4)$$

Найти количество конверсионных периодов можно из равенства:

$$(1+r)^n = \frac{V}{V - S_0 r}. \tag{1.5}$$

Сумма всех выплат определяется формулой:

$$\Sigma_n = n \cdot V. \tag{1.6}$$

Задача 1.1

Известно: S_0, n, r.

Неизвестно: V.

Найти: V.

15 января планируется взять кредит в банке на сумму 66819600 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Сколько рублей надо платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?

Решение.

Используем формулу (1.3) для вычисления размера ежегодного взноса:

$$V = \frac{S_0 \cdot r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = \frac{66819600 \cdot 0{,}3 \cdot 1{,}3^4}{1{,}3^4 - 1} = 30845880.$$

Ответ: 30845880.

Задача 1.2

Известно: S_0, n, r.

Неизвестно: Σ_n, V.

Найти: Σ_n.

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 40040 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придется отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение.

Используем формулу (1.3) для $n = 3$ и $n = 2$:

$$V_3 = \frac{40040 \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}2^3}{1{,}2^3 - 1} = 19008,$$

$$V_2 = \frac{40040 \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}2^2}{1{,}2^2 - 1} = 26208.$$

Для $n = 3$ общая сумма выплат: $\Sigma_3 = 3 \cdot V_3 = 57024$.

Для $n = 2$ общая сумма выплат: $\Sigma_2 = 2 \cdot V_2 = 52416$.

Откуда: $\Sigma_3 - \Sigma_2 = 4608$.

Ответ: 4608.

Задача 1.3

Известно: S_0, n, r.

Неизвестно: V.

Найти: V.

Фермер взял в банке кредит на сумму 3640000 рублей под 20% годовых. Схема выплаты кредита: раз в год клиент должен выплачивать банку одну и туже сумму, которая состоит из двух частей. Первая часть составляет 20% от оставшейся суммы долга, а вторая часть направлена на погашение оставшейся суммы долга. Каждый следующий год начисляются проценты на оставшуюся сумму. Какой должна быть ежегодная сумма выплаты (в рублях), чтобы фермер полностью погасил кредит тремя равными платежами?

Решение.

Применяя формулу (1.3), находим ежегодный платеж:

$$V = \frac{S_0 \cdot r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = \frac{3640000 \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}2^3}{1{,}2^3 - 1} = 1728000.$$

Ответ: 1728000.

Задача 1.4

Известно: Σ_n, S_0.

Неизвестно: V, n.

Найти: n.

В июне планируется взять кредит в банке на сумму 455000 рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по май каждого года необходимо выплатить часть долга;
- ежегодные выплаты составляют одну и ту же постоянную величину.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 648000 рублей?

Решение.

Сумма всех выплат определяется по формуле (1.6), откуда:

$$V = \frac{\Sigma_n}{n} = \frac{648000}{n}.$$

С другой стороны из формулы (1.3):

$$V = \frac{S_0 \cdot r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = \frac{455000 \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}2^n}{1{,}2^n - 1} = \frac{91000 \cdot 1{,}2^n}{1{,}2^n - 1}.$$

Тогда составляем уравнение:

$$\frac{91 \cdot 1{,}2^n}{1{,}2^n - 1} = \frac{648}{n}$$

или

$$91 \cdot n \cdot 1{,}2^n = 648 \cdot (1{,}2^n - 1),$$
$$648 \cdot 1{,}2^n - 91n \cdot 1{,}2^n = 648,$$
$$1{,}2^n \cdot (648 - 91n) = 648.$$
$$648 - 91n > 0 \Rightarrow n \leq 7.$$

Вернемся к уравнению, которое составили.

Учитывая, что $1{,}2^n = \frac{6^n}{5^n}$ и $648 = 2^3 \cdot 3^4$:

$$\frac{91 \cdot 6^n}{5^n\left(\frac{6^n}{5^n} - 1\right)} = \frac{648}{n},$$
$$6^n - 5^n = \frac{91n \cdot 2^n \cdot 3^n}{2^3 \cdot 3^4},$$
$$6^n - 5^n = 91n \cdot 2^{n-3} \cdot 3^{n-4}$$

Подбираем корень уравнения, учитывая, что он является целым числом.

$$n = 1 \Rightarrow 6 \neq \frac{91}{108},$$
$$n = 2 \Rightarrow 11 \neq \frac{91}{9},$$
$$n = 3 \Rightarrow 91 = 91.$$

Ответ: 3.

Задача 1.5

Известно: r, V, n.

Неизвестно: S_0.

Найти: S_0.

31 декабря 2014 года Сергей взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Сергей переводит в банк 2132325 рублей. Какую сумму взял Сергей в кредит, если он смог выплатить долг четырьмя равными платежами?

Решение.

Из формулы (1.3), определяем сумму кредита:

$$V = \frac{S_0 \cdot r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \Longrightarrow S_0 = \frac{V((1+r)^n - 1)}{r(1+r)^n} = \frac{2132325 \cdot \left(\left(\frac{9}{8}\right)^4 - 1\right)}{\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^4} = 6409000.$$

Ответ: 6409000.

Задания для самостоятельного решения

1. Иван Иванович взял 910000 рублей в кредит под 20 % годовых. По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Иван

Иванович переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Иван Иванович выплатил долг тремя равными платежами?

Ответ: 432000.

2. 31 декабря 2014 года Савелий взял в банке 7378000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Савелий переводит в банк платеж. Весь долг Савелий выплатил за три равных платежа. На сколько рублей меньше он отдал бы банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

Ответ: 506250.

3. Предприниматель взял в банке кредит на сумму 9930000 рублей под 10% годовых. Схема погашения кредита: раз в год клиент должен выплачивать банку одну и ту же сумму, которая состоит из двух частей. Первая часть составляет 10% от оставшейся суммы долга, а вторая часть направлена на погашения оставшейся суммы долга. Каждый следующий год проценты начисляются только на оставшуюся сумму долга. Какой должна быть ежегодная сумма выплат (в рублях), чтобы предприниматель полностью погасил кредит тремя равными платежами?

Ответ: 3993000.

4. В июне планируется взять кредит в банке на сумму 3225000 рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по май каждого года необходимо выплатить часть долга;
– ежегодные выплаты составляют одну и ту же постоянную величину.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 3967500 рублей?

Ответ: 2.

2. Равные взносы, кроме последнего

Если задача содержит условие «ежегодные выплаты не должны превышать заданной величины», то это значит, что все, кроме последней, ежегодные выплаты равны этой величине. Последний взнос меньше заданной величины и совпадает с величиной последней наращенной суммы, то есть:

$$S_n = S_0 \cdot (1+r)^n - V \cdot \frac{(1+r)^n - (1+r)}{r} = \tilde{V},$$

$$\tilde{V} = (1+r)^n \cdot \left(S_0 - \frac{V}{r}\right) + \frac{V}{r} \cdot (1+r). \qquad (1.7)$$

Если требуется найти минимальное количество конверсионных периодов, то в решении используется следующее неравенство:

$$(1+r)^n < \frac{V}{V - S_0 r}. \qquad (1.8)$$

Задача 2.1
Известно: S_0, r, V.
Неизвестно: n.
Найти: n.

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 1900000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

На какое минимальное количество лет можно взять кредит при условии, что ежегодные выплаты были не более 560000 рублей?

Решение 1.

Составим таблицу. Значения столбца 1 вычисляются по формуле $S_k = D_{k-1} \cdot (1+r)$. Значения столбца 4 находятся по формуле $D_k = S_k - V_k$.

k	S_k	V_k	D_k
0	1900000		1900000
1	2280000	560000	1720000
2	2064000	560000	1504000
3	1804800	560000	1244800
4	1493760	560000	933760
5	1120512	560000	560512
6	672614,4	560000	112614,4
7	135137,28	135137,28	0

Решение 2.

Воспользуемся формулой (1.8):

$$1{,}2^n < \frac{560000}{560000 - 1900000 \cdot 0{,}2} = \frac{28}{9} \approx 3{,}1$$

$$1{,}2^6 \approx 2{,}99, \qquad 1{,}2^7 \approx 3{,}58.$$

То есть по истечении 6 лет, на 7-ом году долг будет выплачен.

Ответ: 7.

Задача 2.2
Известно: $S_0, r, V \leq$ С.
Неизвестно: n.
Найти: n.

В январе 2017 года Александр взял кредит на сумму 2 млн рублей. Порядок выплаты кредита следующий: в январе каждого следующего года банк

начисляет 2% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает оставшийся долг на 2%), затем Александр переводит в банк платеж (сразу после начисления процентов). На какое минимальное число лет Александр может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 400 000 рублей?

Решение.

Воспользуемся формулой (1.8):

$$1{,}02^n < \frac{0{,}4}{0{,}4 - 2 \cdot 0{,}02} = \frac{10}{9} \approx 1{,}1$$

$$1{,}02^5 \approx 1{,}104, \qquad 1{,}02^6 \approx 1{,}13.$$

То есть по истечении 5 лет, на 6-ом году долг будет выплачен.

Ответ: 6.

Задания для самостоятельного решения

1. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 1300000 рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

На какое минимальное количество лет можно взять кредит при условии, что ежегодные выплаты были не более 350000 рублей?

Ответ: 5.

2. 10 января 2016 года Тамара взяла в банке «Максимум» кредит на сумму 1,5 млн рублей. Порядок выплаты кредита следующий: 10 числа каждого следующего месяца банк начисляет 12% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает оставшийся долг на 1%), затем Тамара переводит в банк платеж (сразу после начисления процентов). На какое минимальное количество месяцев Тамара может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 250 000 рублей?

Ответ: 7.

3. Неравные взносы

Ключевая фраза в условии задачи:

– «***В конце каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга предыдущего года***».

Особенность таких задач заключается в следующем: последовательности $\{D_k\}$ и $\{V_k\}$ являются убывающими арифметическими прогрессиями с разностями d и $\tilde{d}$ соответственно.

Выведем формулы, которые будут полезны при решении задач.

1. $S_0,\ D_0 = S_0$.
2. $S_1 = S_0(1+r) D_1 = S_0(1+r) - V_1$.
3. Разность прогрессии $\{D_k\}$:

$$d = D_1 - D_0 = S_0 r - V_1. \quad (1.9)$$

4. $S_2 = D_1(1+r) = S_0(1+r)^2 - V_1(1+r)$. Тогда:

$$D_2 = S_2 - V_2 = S_0(1+r)^2 - V_1(1+r) - V_2, \quad (1.10)$$

или, учитывая, что $\{D_k\} -$ арифметическая последовательность с разностью d, получим:

$$D_2 = D_1 + d = S_0(1+2r) - 2V_1. \quad (1.11)$$

5. Методом математической индукции доказывается рекуррентная формула для D_n:

$$D_n = S_0(1+nr) - V_1 n. \quad (1.12)$$

Но так как $D_n = 0$, то

$$V_1 = S_0\left(r + \frac{1}{n}\right). \quad (1.13)$$

Из формулы (1.12) получим:

$$S_0 = \frac{V_1 n}{1+nr}. \quad (1.14)$$

$$n = \frac{S_0}{V_1 - S_0 r}. \quad (1.15)$$

6. Из равенств (1.10) и (1.11) находим:

$$V_2 = S_0 r^2 + V_1(1-r).$$

7. Определим разность $\tilde{d}$ арифметической прогрессии $\{V_k\}$, используя (1.13):

$$\tilde{d} = S_0 r^2 - V_1 r = r\left(S_0 r - S_0\left(r + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{-S_0 r}{n}. \quad (1.16)$$

8. Общая сумма выплат находится как сумма n членов арифметической прогрессии $\{V_k\}$:

$$\Sigma_n = \frac{2V_1 + (n-1)\tilde{d}}{2} \cdot n = \frac{S_0 \cdot (rn + r + 2)}{2}. \quad (1.17)$$

Откуда получаем еще одну формулу для вычисления n:

$$n = \frac{2\Sigma_n - S_0(2+r)}{S_0 r}. \quad (1.18)$$

9. Учитывая (1.13) и (1.16) запишем формулу для последнего взноса V_n:

$$V_n = V_1 + (n-1) \cdot \tilde{d} = S_0\left(r + \frac{1}{n}\right) - (n-1) \cdot \frac{S_0 r}{n} = S_0 \cdot \frac{1+r}{n}. \quad (1.19)$$

Задача 3.1

Известно: S_0, r, Σ_n.

Неизвестно: n.

Найти: n.

В июле планируется взять кредит на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения составит 38 млн рублей?

Решение.

Используем формулу (1.18):

$$n = \frac{2\Sigma_n - S_0(2+r)}{S_0 r} = \frac{2 \cdot 38 - 16 \cdot (2 + 0{,}25)}{16 \cdot 0{,}25} = 10.$$

Ответ: 10.

Задача 3.2

Известно: S_0, r, V_{max}.

Неизвестно: Σ_n, n.

Найти: Σ_n.

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платеж составит 9 млн рублей?

Решение 1.

k	S_k	V_k	D_k	d	Сумма выплат
0			28	2	**80,5**
1	35	9	26		
2	32,5	8,5	24		
3	30	8	22		
4	27,5	7,5	20		
5	25	7	18		
6	22,5	6,5	16		
7	20	6	14		
8	17,5	5,5	12		
9	15	5	10		
10	12,5	4,5	8		
11	10	4	6		
12	7,5	3,5	4		
13	5	3	2		
14	2,5	2,5	0		

Решение 2.

Из условия известно, что наибольший годовой платеж составит 9 млн рублей, то есть $V_1 = 9$. Определим разность d арифметической прогрессии $\{D_k\}$ по формуле (1.9):

$$d = D_1 - D_0 = S_0 r - V_1 = 28 \cdot 0{,}25 - 9 = -2.$$

Тогда $D_1 = D_0 + d = S_0 + d = 26$.

Так как $D_n = D_1 + (n-1) \cdot d = 0$, то:

$$n = 1 - \frac{D_1}{d}.$$

Найдем n:

$$n = 1 - \frac{D_1}{d} = 1 - \frac{26}{-2} = 14.$$

Разность $\tilde{d}$ последовательность выплат $\{V_k\}$ найдем по формуле (1.16):

$$\tilde{d} = \frac{-S_0 r}{n} = \frac{-28 \cdot 0{,}25}{14} = -0{,}5.$$

Последний взнос: $V_n = V_1 + (n-1) \cdot \tilde{d} = 9 - 13 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$

По формуле (1.17) находим общую сумму выплат:

$$\Sigma_n = \frac{V_1 + V_n}{2} \cdot n = \frac{9 + 2{,}5}{2} \cdot 14 = 80{,}5.$$

Ответ: 80,5.

Задача 3.3

Известно: S_0, r, V_{max}.

Неизвестно: n.

Найти: n.

В июле планируется взять кредит на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует взять кредит, чтобы наибольший годовой платеж не превысил 3,2 млн рублей?

Решение.

Принимая $V_1 = 3{,}2$ и используя формулу (1.9) находим $d = -0{,}5$ млн. рублей. Тогда $D_1 = D_0 + d = 9 - 0{,}5 = 8{,}5$.

По формуле n-ого члена арифметической прогрессии $\{D_k\}$, получаем:

$$D_n = D_1 + d \cdot (n-1) = 8{,}5 - 0{,}5 \cdot (n-1) = 0,$$

$$9 - 0{,}5n = 0,$$

$$n = 18.$$

Ответ: 18.

Задача 3.4
Известно: $S_0, r, V_{max} < C$.
Неизвестно: n.
Найти: n.

В июле планируется взять кредит в банке на сумме 1 300 000 рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какое минимальное количество лет можно взять кредит при условии, что ежегодные выплаты были не более 350 000?

Решение.

Из условия «ежегодные выплаты были не более 350 000» следует, что размер первоначального взноса, как самого большого по величине в последовательности взносов, меньше либо равен 350 000.

Следовательно:

$$V_1 = S_0\left(r + \frac{1}{n}\right) = 13 + \frac{130}{n} \leq 35,$$
$$n \geq 5{,}9.$$

Ответ: 6.

Задача 3.5
Известно: $n, \Sigma_n = k \cdot S_0$.
Неизвестно: r.
Найти: r.

15-го января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-ое число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-ое число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 15% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение.

Так как $\Sigma_n = 1{,}15S_0$ является суммой n членов $\{V_k\}$, то:

$$\Sigma_n = \frac{2V_1 + (n-1)\tilde{d}}{2} \cdot n = 1{,}15 \cdot S_0, \qquad (1.20)$$

где $\tilde{d} -$ разность арифметической прогрессии $\{V_k\}$, которая вычисляется по формуле (1.16), а $V_1 -$ первый взнос, определяемый по формуле (1.13).

Подставляем в (1.20) значение n, выражения для $\tilde{d}$ и V_1:

$$\Sigma_n = \frac{2S_0\left(r + \frac{1}{14}\right) - 13 \cdot \frac{S_0 r}{14}}{2} \cdot 14 = 1{,}15 \cdot S_0$$

и получаем:

$$\frac{2\left(r + \frac{1}{14}\right) - 13 \cdot \frac{r}{14}}{2} \cdot 14 = 1{,}15.$$

Откуда, $r = 0{,}02$ или 2%.

Ответ: 2.

Задача 3.6

Известно: n, r, S_0.

Неизвестно: Σ_n.

Найти: Σ_n.

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на 5 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

Решение 1.

Разобьем решение на два этапа. Первый этап – это нахождение значения первого взноса – V_1. Используем тот факт, что долг каждого года должен быть на одну и ту же величину d меньше долга предыдущего года и долг на конец пятого года равен нулю.

k	S_k	V_k	D_k	d
0	10		$S_0 = D_0 = 10$	$D_0 - D_1 = x - 0{,}1 \cdot S_0$
1	$S_1 = 1{,}1 \cdot S_0$	$V_1 = x$	$D_1 = 1{,}1 \cdot S_0 - x$	
2			$D_2 = D_1 - d = 1{,}2 \cdot S_0 - 2x$	
3			$D_3 = D_2 - d = 1{,}3 \cdot S_0 - 3x$	
4			$D_4 = D_3 - d = 1{,}4 \cdot S_0 - 4x$	

Из последнего равенства находим $x = 3$.

Теперь, зная $V_1 = x = 3$, определим значения V_2, V_3, V_4, V_5, при этом учитываем, что последовательность взносов также арифметическая прогрессия.

k	S_k	V_k	$\tilde{d}$	D_k
0	10			10
1	11	3		8

2	$S_2 = 1{,}1 \cdot D_1 = 8{,}8$	$V_2 = S_2 - D_2 = 2{,}8$	$-0{,}2$	6
3	6,6	2,6		4
4	4,4	2,4		2
5	2,2	2,2		0

Сумма выплат – сумма пяти членов арифметической прогрессии $\{V_k\}$:

$$\Sigma_n = \frac{V_1 + V_n}{2} \cdot n = \frac{3 + 2{,}2}{2} \cdot 5 = 13.$$

Решение 2.

Разность $\tilde{d}$ арифметической прогрессии $\{V_k\}$ определяется по формуле (1.16):

$$\tilde{d} = \frac{-S_0 r}{n}.$$

Общая сумма выплат, как сумма n членов $\{V_k\}$ определяется по формуле (1.17):

$$\Sigma_n = \frac{S_0 r \cdot n + S_0(2 + r)}{2}.$$

Подставляем исходные данные:

$$\Sigma_n = \frac{10 \cdot 0{,}1 \cdot 5 + 10 \cdot (2 + 0{,}1)}{2} = 13.$$

Ответ: 13.

Задача 3.7

Известно: S_0, n, r.

Неизвестно: Σ_k.

Найти: Σ_k.

Жанна взяла в банке в кредит 1,8 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна возвращать банку часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 1%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна вернет банку в течение первого года кредитования?

Решение.

Количество конверсионных периодов – 24 месяца. По формуле (1.13) определим величину первого взноса:

$$V_1 = S_0\left(r + \frac{1}{n}\right) = 1{,}8 \cdot \left(0{,}01 + \frac{1}{24}\right) = 0{,}093.$$

Определяем разность $\tilde{d}$ арифметической прогрессии $\{V_k\}$ по формуле (1.16):

$$\tilde{d} = \frac{-S_0 r}{n} = \frac{-1{,}8 \cdot 0{,}01}{24} = -0{,}00075.$$

Тогда

$$\Sigma_{12} = \frac{2 \cdot V_1 + \tilde{d}(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 0{,}093 - 0{,}00075 \cdot 11}{2} \cdot 12 = 1{,}0665.$$

Ответ: 1,0665.

Задача 3.8
Известно: S_0, n, V_{max}, V_{min}.
Неизвестно: r.
Найти: r.

В июле планируется взять кредит в банке на 6 млн рублей на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на x по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите x, если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту не более 1,9 млн рублей, а наименьший – не менее 0,5 млн рублей.

Решение.

Так как наибольший годовой платеж по кредиту не более 1,9 млн рублей, значит $V_1 = V_{max} = 1{,}9$. Наименьший годовой платеж не менее 0,5 млн руб, следовательно, $V_{15} = V_{min} = 0{,}5$.

Общая сумма выплат – сумма 15 членов арифметической прогрессии $\{V_k\}$ определяется как:

$$\Sigma_n = \frac{V_1 + V_n}{2} \cdot n = \frac{1{,}9 + 0{,}5}{2} \cdot 15 = 18.$$

С другой стороны из формулы (16) находим r:

$$\Sigma_n = \frac{S_0 r \cdot n + S_0(2 + r)}{2} = \frac{6 \cdot r \cdot 15 + 6(2 + r)}{2} = 18.$$

Откуда $r = 0{,}25$ или 25%.

Ответ: 25.

Задача 3.9
Известно: S_0, r, V_{min}.
Неизвестно: n, Σ_n.
Найти: Σ_n.

В июле планируется взять кредит в банке на сумме 14 млн рублей на некоторый срок (целое число лет).

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платеж составит 3,85 млн рублей?

Решение.

Используя формулу (1.19), найдем количество конверсионных периодов. Так как:

$$V_n = S_0 \cdot \frac{1+r}{n} = 14 \cdot \frac{1+0{,}1}{n} = 3{,}85,$$

то $n = 4$.

Теперь по формуле (1.17) находим общую сумму выплат после полного погашения кредита:

$$\Sigma_n = \frac{S_0 \cdot (r \cdot n + 2 + r)}{2} = \frac{14 \cdot (0{,}1 \cdot 4 + 2 + 0{,}1)}{2} = 17{,}5.$$

Ответ: 17,5.

Задача 3.10

Известно: n, r, Σ_n.

Неизвестно: S_0.

Найти: S_0.

15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-ое число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-ое число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после его полного погашения равнялась 1 млн рублей?

Решение.

Используем формулу (1.17):

$$\Sigma_n = \frac{S_0 \cdot (rn + r + 2)}{2}.$$

Откуда

$$S_0 = \frac{2\Sigma_n}{rn + r + 2} = \frac{2 \cdot 1}{0{,}02 \cdot 24 + 0{,}02 + 2} = 0{,}8.$$

Ответ: 0,8.

Задания для самостоятельного решения

1. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 20 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 12% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения составит 45,2 млн рублей?

Ответ: 20.

2. В мае планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по апрель каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в мае каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения составит 6 млн рублей?

Ответ: 3.

3. В августе планируется взять кредит в банке на сумму 3 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июль каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в августе каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения составит 5,1 млн рублей?

Ответ: 6.

4. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения составит 38 млн рублей?

Ответ: 10.

5. В мае планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по апрель каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в мае каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения составит 6 млн рублей?

Ответ: 3.

6. В июле планируется взять кредит на сумму 6 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
   – каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
   – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
   – в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует взять кредит, чтобы наибольший годовой платеж не превысил 1,8 млн рублей?

Ответ: 10.

7. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 3,2 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платеж составит 1,28 млн рублей?

Ответ: 8,48.

8. 15-го января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-ое число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-ое число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Ответ: 1.

9. 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-ое число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-ое число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Ответ: 3.

10. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 20 млн рублей на 5 лет. Условия его возврата таковы:
   – каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
   – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
   – в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

Ответ: 32.

11. Жанна взяла в банке в кредит 1,2 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна возвращать банку часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна вернет банку в течение первого года кредитования?

Ответ: 0,816.

12. В июле планируется взять кредит в банке на сумме 18 млн рублей на срок 10 лет.

Условия его возврата таковы:
   – каждый январь долг возрастает на x% по сравнению с концом предыдущего года;
   – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
   – в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите x, если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту не более 3,78 млн рублей, а наименьший – не менее 1,998 млн рублей.

Ответ: 11.

13. В июле планируется взять кредит в банке на 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:
   – каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;
   – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
   – в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту не более 1,4 млн рублей, а наименьший – не менее 0,6 млн рублей.

Ответ: 20.

14. В июне планируется взять кредит в банке на 4 млн рублей на срок 10 лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту не более 1,3 млн рублей, а наименьший – не менее 0,49 млн рублей.

Ответ: 22,5.

15. В июле планируется взять кредит в банке на 8 млн рублей на срок 10 лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на r по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту не более 1,36 млн рублей, а наименьший – не менее 0,856 млн рублей.

Ответ: 7.

16. В июле планируется взять кредит в банке на сумме 30 млн рублей на некоторый срок (целое число лет).

Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платеж составит 7,8 млн рублей?

Ответ: 57.

17. В июле планируется взять кредит в банке на сумме 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет).

Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платеж составит 1,25 млн рублей?

Ответ: 20,25.

18. Татьяна планирует взять кредит в банке на 6 месяцев. Условия его возврата таковы: 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца, затем со 2-го по 14-ое число каждого месяца необходимо выплатить часть долга. 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-ое число предыдущего месяца. Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после его полного погашения равнялась 362 250 рублей?
Ответ: 350 000.

19. В июле планируется взять кредит на сумму 2 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы: каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года, затем с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга. В июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года. На какой минимальный срок следует взять кредит, чтобы наибольший годовой платеж не превысил 500 000 рублей?
Ответ: 20.

20. 15-го мая планируется взять кредит в банке в размере 12 млн рублей на 19 месяцев. Условия его возврата таковы: 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца, затем со 2-го по 14-ое число каждого месяца необходимо выплатить часть долга. 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-ое число предыдущего месяца. На сколько процентов больше по отношению к взятому кредиту придется заплатить заемщику?
Ответ: 20.

21. Андрей решил взять кредит в банке 331000 рублей на 3 месяца под 10% в месяц. Существует две схемы выплаты кредита:
    1. Банк в конце в конце каждого месяца начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Андрей переводит в банк фиксированную сумму и в результате выплачивает весь долг тремя равными платежами.
    2. Сумма долга в конце каждого месяца увеличивается на 10%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Андреем. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину.

Какую схему выгоднее выбрать Андрею и сколько рублей будет составлять эта выгода?

Ответ: вторая схема, 2100.

4. Заданная последовательность долгов.

Для выявления закономерности составим следующую таблицу:

k	S_k	V_k	D_k
0	S_0		$D_0 = S_0$
1	$S_1 = D_0(1+r)$	$V_1 = S_1 - D_1 = D_0(1+r) - D_1$	D_1
2	$S_2 = D_1(1+r)$	$V_2 = D_1(1+r) - D_2$	D_2
3	$S_3 = D_2(1+r)$	$V_3 = D_2(1+r) - D_3$	D_3
…	…	…	…
$n-1$	$S_{n-1} = D_{n-2}(1+r)$	$V_{n-1} = D_{n-2}(1+r) - D_{n-1}$	D_{n-1}
n	$S_n = D_{n-1}(1+r)$	$V_n = S_n = D_{n-1}(1+r)$	$D_n = 0$

Тогда

$$\sum_n = V_1 + \cdots + V_n = D_0 + r(D_0 + D_1 + \cdots + D_{n-1}). \qquad (1.21)$$

Откуда

$$r = \frac{\sum_n + D_0}{D_0 + D_1 + \cdots + D_{n-1}}. \qquad (1.22)$$

Если последовательность $\{D_k\}$ задана в частях, то есть $D_k = a_k \cdot S$, то таблица принимает вид:

k	S_k	V_k	D_k
0	S_0		$D_0 = S_0$
1	$S_1 = S(1+r)$	$V_1 = S(1+r) - a_1S = S(1+r-a_1)$	a_1S
2	$S_2 = a_1S(1+r)$	$V_2 = a_1S(1+r) - a_2S = S(a_1 + a_1r - a_2)$	a_2S
3	$S_3 = a_2S(1+r)$	$V_3 = S(a_2 + a_2r - a_3)$	a_3S
…	…	…	…
$n-1$	$S_{n-1} = a_{n-2}S(1+r)$	$V_{n-1} = S(a_{n-2} + a_{n-2}r - a_{n-1})$	$a_{n-1}S$
n	$S_n = a_{n-1}S(1+r)$	$V_n = S_n = a_{n-1}S(1+r)$	0

Тогда

$$\Sigma_n = S\big(1 + r + r(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1})\big). \qquad (1.23)$$

Если последовательность $\{D_k\}$ задана в процентах, то переводим проценты в части и используем в решении формулу (1.23).

Задача 4.1

Известно: $S_0, n, \{D_k\}, \sum_n C$.

Неизвестно: r.

Найти: r.

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r по сравнению с концом предыдущего месяца, где $r -$ целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (млн руб)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найти наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Решение.

По формуле (20) получаем:

$$\sum_n = 1 + r(1 + 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1) = 1 + 2{,}6r.$$

Учитывая то, что $\sum_n < 1{,}2$:

$$1 + 2{,}6r < 1{,}2.$$

Откуда:

$$r < 0{,}077.$$

Так как требуется наибольшее значение r, следовательно, $r = 0{,}08$ или 8%.

Ответ: 8.

Задача 4.2

Известно: $r, n, \{D_k\}, V_k > C$.

Неизвестно: S_0.

Найти: наименьшее S_0.

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 25 по сравнению с концом предыдущего месяца;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (млн руб)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найти наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

Решение.

Находим выражение для каждой из выплат:

$$V_1 = S(1 + 0{,}25 - 0{,}7) = 0{,}55 \cdot S$$
$$V_2 = S(0{,}7(1 + 0{,}25) - 0{,}4) = 0{,}475 \cdot S$$
$$V_3 = S \cdot 0{,}4(1 + 0{,}25) = 0{,}5 \cdot S$$

Так как наименьшая выплата $V_2 = 0{,}475 \cdot S$, поэтому решаем неравенство:

$$0{,}475 \cdot S > 5,$$
$$S > 10{,}53.$$

Поэтому $S = 11$ млн рублей.

Ответ: 11.

Задача 4.3
Известно: $r, n, \{D_k\}, \{V_k\}$.
Неизвестно: S_0, Σ_n.
Найти: Σ_n.

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс рублей. Условия его возврата таковы:

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным S тыс рублей;
- выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 360 тыс рублей;
- к июлю 2021 года долг будет выплачен полностью.

Найти общую сумму выплат за 5 лет.

Решение.

Составим таблицу для $\{S_k\}$, $\{V_k\}$ и $\{D_k\}$, с учетом условия и $V_k = S_k - D_k$:

k	S_k	V_k	D_k
0	S		S
1	$S_1 = 1{,}2 \cdot S$	$V_1 = 0{,}2 \cdot S$	S
2	$S_2 = 1{,}2 \cdot S$	$V_2 = 0{,}2 \cdot S$	S
3	$S_3 = 1{,}2 \cdot S$	$V_3 = 0{,}2 \cdot S$	S
4	$S_4 = 1{,}2 \cdot S$	360	D_4
5	$S_5 = 1{,}2 \cdot D_4$	360	0

Так как

$$S_5 = 1{,}2 \cdot D_4 = 360, \text{ то } D_4 = 300.$$

Так как

$$D_4 = 1{,}2 \cdot S - 360 = 300, \text{ то } S = 550.$$

Сумма все выплат:

$$\Sigma_5 = 3 \cdot 0{,}2 \cdot S + 2 \cdot 360 = 0{,}6 \cdot 550 + 720 = 1050 \text{ тыс рублей.}$$

Ответ: 1050.

Задача 4.4
Известно: $r, n, \{D_k\}, V_k \in Z$.
Неизвестно: S_0.
Найти: S_0.

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – натуральное число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 15 по сравнению с концом предыдущего месяца;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (млн руб)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найти наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число млн рублей.

Решение.

Находим выражение для каждой из выплат:

$$V_1 = S(1 + 0{,}15 - 0{,}7) = 0{,}45 \cdot S,$$
$$V_2 = S(0{,}7(1 + 0{,}15) - 0{,}4) = 0{,}405 \cdot S,$$
$$V_3 = S \cdot 0{,}4(1 + 0{,}15) = 0{,}46 \cdot S.$$

Перейдем к обыкновенным дробям:

$$V_1 = \frac{90}{200} \cdot S$$
$$V_2 = \frac{92}{200} \cdot S$$
$$V_3 = \frac{81}{200} \cdot S.$$

Для того, чтобы каждая из выплат составляла целое число, надо чтобы наименьшее $S = 200$ млн рублей.

Ответ: 200.

Задача 4.5

Известно: $r, n, \{D_k\}, \Sigma_n < C$.

Неизвестно: S_0.

Найти: наибольшее S_0.

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на S млн рублей, где S – целое число, на 4 года. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Год	2016	2017	2018	2019	2020
Долг (в млн руб)	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	$0{,}1S$	0

Найдите наибольшее значение S, чтобы общая сумма выплат была меньше 50 млн рублей?

Решение.

Используя формулу (1.23), получаем:

$$\Sigma_n = 1{,}36 \cdot S < 50,$$
$$S < 36{,}76.$$

Следовательно, $S = 36$ млн рублей.

Ответ: 36.

Задача 4.6
Известно: $r, n, \{D_k\}, V_{max} - V_{min} < C$.
Неизвестно: S_0.
Найти: наименьшее S_0.

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 10 по сравнению с концом предыдущего месяца;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (млн руб)	S	$0{,}8S$	$0{,}3S$	0

Найти наименьшее значение S, при котором разница между наибольшей и наименьшей выплатами будет меньше 1 млн рублей.

Решение.

Находим выражение для каждой из выплат:

$$V_1 = S(1 + 0{,}1 - 0{,}8) = 0{,}3 \cdot S,$$
$$V_2 = S(0{,}8(1 + 0{,}1) - 0{,}3) = 0{,}58 \cdot S,$$
$$V_3 = S \cdot 0{,}3(1 + 0{,}1) = 0{,}33 \cdot S.$$

Решаем неравенство:

$$V_{max} - V_{min} = 0{,}58 \cdot S - 0{,}3 \cdot S < C,$$
$$S < 3{,}6.$$

Следовательно, $S = 3$ млн рублей.

Ответ: 3.

Задача 4.7
Известно: $r, n, \{D_k\}$.
Неизвестно: S_0, Σ_n.
Найти: $100\left(\frac{\Sigma_n}{S_0} - 1\right)$.

В конце сентября 2016 года планируется взять кредит в банке. Условия его возврата таковы:

- в течение первого месяца каждого квартала долг увеличивается на 6% по сравнению с долгом на конец предыдущего квартала;
- в течение второго месяца каждого квартала необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- долг на начало каждого квартала должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Квартал	1	2	3	4
Долг (в %)	100	75	40	0

На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение.

Представим последовательность долгов в частях:

Квартал	1	2	3	4
Долг (в %)	1	0,75	0,4	0

По формуле (1.23) определяем общую сумму выплат:

$$\Sigma_n = S_0\big(1 + 0{,}06 + 0{,}06 \cdot (0{,}75 + 0{,}4)\big) = 1{,}129 \cdot S_0.$$

Чтобы узнать, на сколько процентов общая сумма выплат будет больше суммы кредита, надо найти значение выражения:

$$100\left(\frac{\Sigma_n}{S_0} - 1\right) = 100 \cdot \left(\frac{1{,}129 \cdot S_0}{S_0} - 1\right) = 12{,}9.$$

Ответ: 12,9.

Задача 4.8

Известно: $S_0, r, n, \{D_k\}$.

Неизвестно: Σ_n.

Найти: $100\left(\frac{\Sigma_n}{S_0} - 1\right)$.

Виктория Викторовна взяла в банке кредит 1 500 000 рублей на 5 лет при условии:

- долг будет возвращаться пятью платежами, производимыми в конце каждого из пяти лет;
- имеющийся в начале каждого (начиная с первого) года долг будет в конце года увеличиваться на 15%;
- в конце года, уже после начисления процентов, часть долга необходимо погасить в таком объеме, чтобы остаток был равен сумме указанной в таблице:

Год	1	2	3	4	5
Текущий долг (в рублях)	1 200 000	900 000	600 000	300 000	0

На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение.

По формуле (1.21) находим общую сумму выплат:

$$\Sigma_n = 15 + 0{,}15(15 + 12 + 9 + 6 + 3) = 21{,}75.$$

Чтобы узнать, на сколько процентов общая сумма выплат будет больше суммы кредита, надо найти значение выражения:

$$100\left(\frac{\Sigma_n}{S_0} - 1\right) = 100 \cdot \left(\frac{21{,}75}{15} - 1\right) = 45.$$

Ответ: 45.

Задания для самостоятельного решения

1. 15-го января планируется взять кредит в банке на сумму 1 млн рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн руб)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять более 1,25 млн рублей.

Ответ: 19.

2. В конце декабря 2016 года планируется взять кредит в банке на год в размере N млн рублей, где N – целое число. Условия его возврата таковы:

– в течение первого месяца каждого квартала долг увеличивается на 2% по сравнению с долгом на конец предыдущего квартала;
– в течение второго месяца каждого квартала необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– долг на начало каждого квартала должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Квартал	1	2	3	4
Долг (млн руб)	S	$0{,}8N$	$0{,}5N$	0

Найти наименьшее значение N, при котором каждая из выплат будет больше 1 млн рублей.

Ответ: 5.

3. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле 2017,2018 и 2019 долг остается равным S тыс рублей;
– выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 625 тыс рублей;
– к июлю 2021 долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

Ответ: 900.

4. В июле 2017 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – натуральное число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 10 по сравнению с концом предыдущего месяца;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (млн руб)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найти наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число млн рублей.

Ответ: 100.

5. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на S млн рублей, где S – целое число, на 4 года. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Год	2016	2017	2018	2019	2020
Долг (в млн руб)	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	$0{,}1S$	0

Найдите наибольшее значение S, чтобы общая сумма выплат была меньше 109 млн рублей?

Ответ: 80.

6. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на S млн рублей, где S – целое число, на 4 года. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Год	2016	2017	2018	2019	2020
Долг (в млн руб)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	$0{,}2S$	0

Найдите наименьшее значение S, чтобы общая сумма выплат была больше 20 млн рублей?

Ответ: 14.

7. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 25 по сравнению с концом предыдущего месяца;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (млн руб)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найти наименьшее значение S, при котором разница между наибольшей и наименьшей выплатами будет меньше 1 млн рублей.

Ответ: 13.

8. Индивидуальному предпринимателю 15 марта был выдан кредит на приобретение оборудования. В нижеследующей таблице указан график его погашения. Текущий долг указывается в процентах:

Дата	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07	15.08	15.09
Текущий долг	100	80%	65%	45%	30%	20%	0%

В конце каждого месяца, начиная с марта, банк увеличивает текущий долг на 5%. После этого в первой половине последующего месяца заемщик обязан внести в банк такую сумму, чтобы оставшийся долг стал равным указанному в таблице текущему долгу на 15-ое число этого месяца. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Ответ: 17.

9. Индивидуальный предприниматель 15 мая обратился в банк с просьбой о предоставлении кредита. В таблице представлен график его погашения. Текущий долг выражается в процентах от кредита:

Дата	15.05	15.06	15.07	15.08	15.09	15.10	15.09
Текущий долг	100	80%	60%	40%	20%	0%	

В конце каждого месяца, начиная с мая, текущий долг увеличивается на 5%, а выплаты по погашению кредита должны происходить с 1 по 14 число каждого месяца, начиная с июня. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Ответ: 15.

10. Мария Степановна взяла в банке кредит 2 000 000 рублей на 5 лет при условии:

– долг будет возвращаться пятью платежами, производимыми в конце каждого из пяти лет;
– имеющийся в начале каждого (начиная с первого) года долг будет в конце года увеличиваться на 10%;
– в конце года, уже после начисления процентов, часть долга необходимо погасить в таком объеме, чтобы остаток был равен сумме указанной в таблице:

Год	1	2	3	4	5
Текущий долг (в руб)	1 600 000	1 200 000	800 000	400 000	0

На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Ответ: 30.

5. Разные задачи

Задача 5.1
Известно: $n, V_i = k \cdot S_i$.
Неизвестно: r, S_0.
Найти: r.

Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк ¾ от всей суммы, которую он должен банку к этому году, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму, на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке.

Решение.

k	S_k	Условие задачи	V_k	D_k
0	S_0			S_0
1	$S_1 = (1+x) \cdot S_0$	$\frac{3}{4}$ от всей суммы, которую должен банку к этому году	$V_1 = \frac{3 \cdot S_0(1+x)}{4}$	$D_1 = S_1 - V_1 = \frac{S_0(1+x)}{4}$
2	$S_2 = (1+x) \cdot D_1 = = \frac{S_0(1+x)^2}{4}$	на 21% превышающая величину кредита	$V_2 = 1{,}21 \cdot S_0$	$D_2 = S_2 - V_2 = = S_0 \cdot \left(\frac{(1+x)^2}{4} - 1{,}21\right)$

Так как $D_2 = 0$, то решаем уравнение:

$$S_0 \cdot \left(\frac{(1+x)^2}{4} - 1{,}21\right) = 0,$$

$$\frac{(1+x)^2}{4} - 1{,}21 = 0.$$

Откуда $x = 1{,}2$ или 120%.

Ответ: 120.

ВКЛАДЫ

1. Зависимость первоначального вклада и наращенной суммы

Задача 1.1
Известно: $n, D_n = k \cdot S_0$.
Неизвестно: S_0, r_1, r_2.
Найти: r_2.

Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40%. К концу следующего года накоплена сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

Решение.

k	S_k	V_k	D_k
0	S_0		S_0
1	$S_1 = S_0(1+r_1)$	$\frac{1}{4}S_1 = \frac{1}{4}S_0(1+r_1)$	$\frac{3}{4}S_0(1+r_1)$
2	$\frac{3}{4}S_0(1+r_1)(1+r_2)$		

Так как через год банк увеличил процент годовых на 40%, то $r_2 = r_1 + 0{,}4$. Исходя из того, что к концу второго года после начисления процентов размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным взносом S_0 в 1,44 раза, то можно записать уравнение:

$$\frac{3}{4}S_0(1+r_1)(1{,}4+r_1) = 1{,}44S_0.$$

Откуда $r_1 = 0{,}2$, тогда новая процентная ставка $r_2 = 0{,}6$ или 60 %.

Ответ: 60.

2. Дополнительные взносы на вклад

Для выявления закономерности составим таблицу:

k	S_k	V_k	D_k
0	S_0		$D_0 = S_0$
1	$S_1 = D_0(1+r) = S_0(1+r)$	$+V$	$D_1 = S_1 + V = S_0(1+r) + V$
2	$S_2 = D_1(1+r) = S_0(1+r)^2 + V(1+r)$	$+V$	$D_2 = S_0(1+r)^2 + V(1+r) + V$
3	$S_3 = S_0(1+r)^3 + V(1+r)^2 + V(1+r)$	$+V$	$D_3 = S_0(1+r)^3 + V(1+r)^2 + +V(1+r) + V$
4	$S_4 = S_0(1+r)^4 + V(1+r)^3 + +V(1+r)^2 + V(1+r)$		

Таким образом, рекуррентная формула для S_n имеет вид:

$$S_n = S_0(1+r)^n + V(1+r)^{n-1} + V(1+r)^{n-2} + \cdots + V(1+r),$$

$$S_n = S_0(1+r)^n + V\big((1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \cdots + (1+r)\big).$$

$(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \cdots + (1+r) -$ это сумма $n-1$ членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1+r$. Тогда последняя наращенная сумма определяется формулой:

$$S_n = S_0(1+r)^n + V \cdot \frac{(1+r)^n - (1+r)}{r}. \qquad (2.1)$$

Формула для вычисления размера ежегодного взноса имеет вид:

$$V = \frac{r \cdot (S_n - S_0 \cdot (1+r)^n)}{(1+r)^n - (1+r)}. \qquad (2.2)$$

Формула для вычисления S_0:

$$S_0 = \frac{S_n}{(1+r)^n} - \frac{V}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^{n-1}}\right). \qquad (2.3)$$

Задача 2.1
Известно: $n, S_0, r, D_n = k \cdot S_0$.
Неизвестно: V.
Найти: V.

В банк помещена сумма 3900 тысяч рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после вычисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?

Решение 1.

k	S_k	V_k	D_k
0	S_0		
1	$S_0(1+r)$	V	$S_0(1+r)+V$
2	$S_0(1+r)^2+V(1+r)$	V	$S_0(1+r)^2+V(1+r)+V$
3	$S_0(1+r)^3+V(1+r)^2+V(1+r)$	V	$S_0(1+r)^3+V(1+r)^2+$ $+V(1+r)+V$
4	$S_0(1+r)^4+V(1+r)^3+$ $+V(1+r)^2+V(1+r)$	V	$S_0(1+r)^4+V(1+r)^3+$ $+V(1+r)^2+V(1+r)+V$
5	$S_0(1+r)^5+V(1+r)^4+$ $+V(1+r)^3+V(1+r)^2+V(1+r)$		

Исходя из того, что к концу пятого года после начисления процентов размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным взносом S_0 на 725 %, то есть составил 825 % или 8,25 от S_0, можно записать уравнение:

$$S_0(1+r)^5+V\big((1+r)^4+(1+r)^3+(1+r)^2+(1+r)\big)=8{,}25\cdot S_0$$

Подставляем исходные данные:

$$3900\cdot 1{,}5^5+V(1{,}5^4+1{,}5^3+1{,}5^2+1{,}5)=8{,}25\cdot 3900$$

$$V=\frac{8{,}25\cdot 3900-3900\cdot 1{,}5^5}{1{,}5^4+1{,}5^3+1{,}5^2+1{,}5}$$

$$V=210.$$

Решение 2.

Воспользуемся формулой (2.2):

$$V=\frac{0{,}5\cdot(8{,}25\cdot 3900-3900\cdot(1+0{,}5)^5)}{(1+0{,}5)^5-(1+0{,}5)}=210 \text{ тыс рублей.}$$

Ответ: 210.

В том случае, если взносы не регулярны, то есть осуществлялись не во всех конверсионных периодах, удобнее пользоваться таблицей.

Задача 2.2
Известно: $n, r, V, D_n < k$.
Неизвестно: S_0.
Найти: S_0.

Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме того в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

Решение.

k	S_k (начало года)	V_k	D_k (конец года)
0	S_0		
1	S_0		$S_0(1+r)$
2	$S_0(1+r)$		$S_0(1+r)^2$
3	$S_0(1+r)^2$	$+V$	$S_0(1+r)^3+V(1+r)$
4	$S_0(1+r)^3+V(1+r)$	$+V$	$S_0(1+r)^4+V(1+r)^2+V(1+r)$

По условию задачи:

$$S_0(1+r)^4+V(1+r)^2+V(1+r)<k,$$

откуда

$$S_0<\frac{k-V(1+r)(2+r)}{(1+r)^4}.$$

Подставляем данные задачи:

$$S_0<\frac{25-3\cdot(1+0{,}1)\cdot(2+0{,}1)}{(1+0{,}1)^4},$$

$$S_0<12{,}34.$$

Таким образом, $S_0=12$ млн рублей.

Ответ: 12.

Задача 2.3

Известно: $n, r, V, D_n-S_0-2V>k$.

Неизвестно: S_0.

Найти: S_0.

Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме того в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 5 млн рублей.

Решение.

k	S_k (начало года)	V_k	D_k (конец года)
0	S_0		
1	S_0		$S_0(1+r)$
2	$S_0(1+r)$		$S_0(1+r)^2$
3	$S_0(1+r)^2$	$+V$	$S_0(1+r)^3+V(1+r)$
4	$S_0(1+r)^3+V(1+r)$	$+V$	$S_0(1+r)^4+V(1+r)^2+V(1+r)$

По условию задачи:

$$S_0(1+r)^4 + V(1+r)^2 + V(1+r) - S_0 - 2V > k,$$

откуда

$$S_0 > \frac{k - V(1+r)(2+r) + 2V}{(1+r)^4 - 1}.$$

Подставляем данные задачи:

$$S_0 > \frac{5 - 3 \cdot (1+0{,}1) \cdot (2+0{,}1) + 6}{(1+0{,}1)^4 - 1},$$

$$S_0 > 8{,}77.$$

Таким образом, $S_0 = 9$ млн рублей.

Ответ: 9.

Задача 2.4

Известно: $S_0, n, r, D_n - S_0 - 2V > k$.

Неизвестно: V.

Найти: V_{min}.

Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года банк увеличивается вклад на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме того в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на x млн рублей, где x – целое число. Найдите наименьшее значение x, при котором банк за четыре года начислит на вклад больше 7 млн рублей.

Решение.

k	S_k (начало года)	V_k	D_k (конец года)
0	S_0		
1	S_0		$S_0(1+r)$
2	$S_0(1+r)$		$S_0(1+r)^2$
3	$S_0(1+r)^2$	$+x$	$S_0(1+r)^3 + x(1+r)$
4	$S_0(1+r)^3 + V(1+r)$	$+x$	$S_0(1+r)^4 + x(1+r)^2 + x(1+r)$

По условию задачи $D_4 - S_0 - 2x > 7$, следовательно:

$$S_0(1+r)^4 + x(1+r)^2 + x(1+r) - S_0 - 2x > 7,$$

$$10 \cdot 1{,}1^4 + 1{,}1^2 \cdot x + 1{,}1x - 10 - 2x > 7,$$

$$0{,}31x > 2{,}359,$$

$$x > 7{,}61.$$

Таким образом, $x = 8$.

Ответ: 8.

3. Два варианта размещения вкладов

Задача 3.1

Известно: $D_1^1 + D_2^1$.

Неизвестно: S_0, r_1, r_2.

Найти: $D_1^2 + D_2^2$.

В начале года $\frac{5}{6}$ некоторой суммы денег вложили в банк *А*, а то, что осталось – в банк *Б*. Если вклад находится в банке с начала года, то к концу года он возрастает на определенный процент, величина которого зависит от банка. Известно, что к концу первого года сумма вкладов стала равна 670 у.е., к концу следующего – 749 у.е. Если первоначально $\frac{5}{6}$ суммы было бы вложено в банк *Б*, а оставшуюся вложили бы в банк *А*, то по истечении одного года сумма выросла бы до 710 у.е. Определите сумму вкладов по истечении второго года в этом случае.

Решение.

№	k	Банк *А*	Банк *Б*
1	0	$\frac{5}{6}S_0$	$\frac{1}{6}S_0$
	1	$\frac{5}{6}S_0(1+r_1)+\frac{1}{6}S_0(1+r_2)=S_0\left(1+\frac{5}{6}r_1+\frac{1}{6}r_2\right)=670$	
	2	$\frac{5}{6}S_0(1+r_1)^2+\frac{1}{6}S_0(1+r_2)^2=S_0\left(\frac{5}{6}(1+r_1)^2+\frac{1}{6}(1+r_2)^2\right)=749$	
2	0	$\frac{1}{6}S_0$	$\frac{5}{6}S_0$
	1	$\frac{1}{6}S_0(1+r_1)+\frac{5}{6}S_0(1+r_2)=S_0\left(1+\frac{1}{6}r_1+\frac{5}{6}r_2\right)=710$	
	2	$\frac{1}{6}S_0(1+r_1)^2+\frac{5}{6}S_0(1+r_2)^2=S_0\left(\frac{1}{6}(1+r_1)^2+\frac{5}{6}(1+r_2)^2\right)=Z$	

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} S_0\left(1+\dfrac{5r_1+r_2}{6}\right)=670 \\ S_0\left(1+\dfrac{r_1+5r_2}{6}\right)=710 \\ S_0\left(\dfrac{5}{6}(1+r_1)^2+\dfrac{1}{6}(1+r_2)^2\right)=749 \\ S_0\left(\dfrac{1}{6}(1+r_1)^2+\dfrac{5}{6}(1+r_2)^2\right)=Z \end{cases}$$

Найдет отношение первого и второго уравнений:

$$\frac{6+5r_1+r_2}{6+r_1+5r_2}=\frac{67}{71}\ \Rightarrow\ r_2=\frac{12}{11}r_1+\frac{1}{11}$$

Тогда:

$$r_2+1=\frac{12}{11}(r_1+1). \qquad (*)$$

Найдем отношение третьего и четвертого уравнений:

$$\frac{\frac{5}{6}(1+r_1)^2+\frac{1}{6}(1+r_2)^2}{\frac{1}{6}(1+r_1)^2+\frac{5}{6}(1+r_2)^2}=\frac{749}{Z}$$

Подставляем (*) в это уравнение:

$$\frac{5(1+r_1)^2+\frac{144}{121}(1+r_1)^2}{(1+r_1)^2+\frac{720}{121}(1+r_1)^2}=\frac{749}{Z}$$

$$\frac{749}{841}=\frac{749}{Z}.$$

Откуда 841 у.е.

Ответ: 841.

4. Изменение процентных ставок

Задача 4.1

Известно: $r, D_n = k \cdot S_0$.

Неизвестно: S_0, n.

Найти: n.

За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}$ % и, наконец, 12,5% в месяц.

Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}$%. Определите срок хранения вклада.

Решение.

$$r_1 = 0{,}05, r_2 = 0{,}12, r_3 = \frac{1}{9}, r_4 = 0{,}125.$$

Введем обозначения для количества конверсионных периодов, соответствующих каждой из четырех процентных ставок: k_1, k_2, k_3, k_4. Тогда срок хранения: $n = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$.

Так как первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}$%, то есть стала составлять $204\frac{1}{6}$% от первоначальной суммы, то $S_n = \frac{49}{24}S_0$. Тогда получаем:

$$S_0(1+r_1)^{k_1}(1+r_2)^{k_2}(1+r_3)^{k_3}(1+r_4)^{k_4} = \frac{49}{24}S_0,$$

$$1{,}05^{k_1}1{,}12^{k_2}\left(\frac{10}{9}\right)^{k_3}1{,}125^{k_4} = 7^2 \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-1}.$$

Представляем основания степеней в виде обыкновенных дробей, раскладываем все числа на простые множители и выполняем операции над степенями с одинаковыми основаниями:

$$7^{k_1+k_2} \cdot 5^{-k_1-2k_2+k_3} \cdot 3^{k_1-2k_3+2k_4} \cdot 2^{-2k_1+2k_2+k_3-3k_4} = 7^2 \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-1}.$$

Составим систему:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 2 \\ -k_1 - 2k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 - 2k_3 + 2k_4 = -1 \\ -2k_1 + 2k_2 + k_3 - 3k_4 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = 2 - k_2 \\ k_2 = k_3 - 2 \\ k_4 = \frac{3}{2}k_3 - \frac{5}{2} \\ k_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 1 \\ k_3 = 3 \\ k_4 = 2 \end{cases}$$

Откуда $n = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 7$.

Ответ: 7.

Задания для самостоятельного решения

1. Вкладчик внес в банк S млн рублей, где S – целое число, под 20% годовых. По истечении двух лет он увеличил вклад на 3 млн рублей. Найдите наименьшее значение S, если за 4 года банк начислил ему более 6 млн рублей.
   Ответ: 5.
2. Вклад планируется положить на три года, он составляет целое число десятков тысяч рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года. Кроме того, в начале второго и третьего годов вклад ежегодно пополняется на 30 000 рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через три года он будет меньше 96 000 рублей.
   Ответ: 20 000.
3. Вклад планируется положить на пять лет, он составляет целое число сотен тысяч рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 20% по сравнению с его размером в начале года. Кроме того, в начале четвертого и пятого годов вклад ежегодно пополняется на 100 000 рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через пять лет он будет меньше 800 тысяч рублей.
   Ответ: 200 000.

Источники задач

1. https://ege.sdamgia.ru/
2. http://alexlarin.net/
3. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2017. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года: учебно-методическое пособие Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2016. – 384 с.
4. Семенов А.В. Единый государственный экзамен. Математика. Комплекс материалов для подготовки учащихся. Учебное пособие /А.В. Семенцов, А.С. Трепалин, И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, П.И. Захаров; под редакцией И.В. Ященко; Московский Центр непрерывного математического образования. – М.: Интеллект-Центр, 2017. – 192 с.

Учебно-методические рекомендации «Банковские задачи на проценты». – Биробиджан: ОГАОУ ДПО «ИПКПР», 2017. – 41 с.

Сверстано и отпечатано в РИО ОГАОУ ДПО «ИПКПР»

г. Биробиджан, ул. Пионерская, 53.