Областное государственное автономное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования
«Институт повышения квалификации педагогических работников»
(ОГАОУ ДПО «ИПКПР»)

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ОПТИМИЗАЦИЮ ВО ВТОРОЙ ЧАСТИ ЕГЭ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ

Сборник учебно-методических рекомендаций

Биробиджан, 2018

Методика обучения решению задач на оптимизацию во второй части ЕГЭ профильного уровня : сборник учебно-методических рекомендаций. – Биробиджан : ОГАОУ ДПО «ИПКПР», 2018. – 17 с.

Сборник «Методика обучения решению задач на оптимизацию во второй части ЕГЭ профильного уровня» рекомендован к печати и практическому применению в образовательных организациях Еврейской автономной области решением регионального учебно-методического объединения от 31 октября 2018 года, № 3.

Составитель:

Е.С. Бабинер, старший преподаватель кафедры общего образования и воспитания ОГАОУ ДПО «ИПКПР»

Ответственный за выпуск:

Е.Л. Корниенко, зав. редакционно-издательским отделом ОГАОУ ДПО «ИПКПР»

Компьютерная верстка:

Т.Н. Серга, технический редактор ОГАОУ ДПО «ИПКПР»

Учебно-методические рекомендации могут быть использованы учителями математики и предназначены для формирования у обучающихся устойчивых навыков в решении задач экономической направленности, посвященных теме «Оптимизация» (задание № 17 профильного ЕГЭ). Выделены три наиболее проблемных вида задач, по которым сформулированы общие алгоритмы решения.

© 2018

Содержание

Методика обучения решению задач на оптимизацию во второй части ЕГЭ профильного уровня.....4

Литература.....17

Методика обучения решению задач на оптимизацию во второй части ЕГЭ профильного уровня

Решение задач с экономическим содержанием во второй части профильного ЕГЭ нередко вызывает затруднения у школьников. Такие задачи связаны со знанием некоторых специфических математических моделей из области экономики, умением переводить сформулированные в виде текста условия в уравнения и неравенства и пониманием того, как решения полученных уравнений и неравенств соотносятся с тем, что написано в условии задачи, – то есть какой смысл имеют полученные результаты.

К наиболее сложным задачам с экономическим содержанием относятся так называемые «задачи на оптимизацию» или экстремальные задачи. Эти задачи описывают разнообразные ситуации, с которыми граждане, предприятия и компании могут встретиться в своей экономической деятельности. Для решения таких задач наиболее часто используются метод перебора вариантов и логических рассуждений и исследование функций элементарными методами и с помощью производной. От школьников требуется либо провести непосредственные вычисления и сравнить их результаты, либо составить уравнение (систему уравнений) и решить его (ее) с учетом некоторых дополнительных условий (например, в целых числах), либо построить функцию, устанавливающую связь между двумя экономическими величинами (например, между объемом производства и прибылью компании), и исследовать ее на экстремальное значение с помощью производной. При исследовании составленной функции необходимо учитывать, что она описывает реальный процесс, поэтому существуют ограничения на область определения или область значений.

Задачи на оптимизацию – это уже настоящие исследовательские задачи, очень близкие по смыслу (но не по методам решения) к задачам с параметром. Сложность таких задач в том, что не всегда есть готовые методы решения и задача может потребовать своего подхода. Успех в решении таких задач заключается в систематическом тренинге.

Решение ***любой*** текстовой задачи складывается из нескольких основных этапов:

– подробный разбор условия задачи для четкого понимания сути описанного в задаче процесса;

– выбор переменных, количество которых должно быть достаточным для того, чтобы составить уравнения и неравенства. Если переменных оказалось больше, чем число уравнений, но при этом все было сделано верно, то «лишние» переменные взаимно уничтожатся или сократятся. Иногда в процессе решения требуется найти не сами переменные по отдельности, а их комбинацию;

– формализация или составление уравнений и неравенств. При этом важно обращать внимание на единицы измерения – они должны быть одинаковыми для всех одноименных величин;

– решение полученного уравнения, неравенства или системы;

– интерпретация полученного результата и непосредственно сам ответ на вопрос задачи.

Приведем примеры наиболее часто встречающихся задач на оптимизацию.

Пример 1. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 60 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 260 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 2 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение. Для формализации условия подобных задач введем следующие обозначения и выражения.

r – продолжительность рабочего дня;

n – количество рабочих, занятых по добыче конкретного металла;

p – масса металла, добываемого одним рабочим в час (производительность);

$r \cdot n$ – человеко-часы;

$r \cdot n \cdot p$ – масса металла, добываемого на шахте в день.

На основе данных задачи составим таблицу:

№ шахты	Всего рабочих	r	*Al*			*Ni*		
			n	p	$r \cdot n \cdot p$	n	p	$r \cdot n \cdot p$
1	60	5		2			3	
2	260	5		3			2	

Таким образом, требуется распределить рабочих в каждой шахте так, чтобы произвести наибольшее количество сплава. Вводим переменные: для первой шахты x – количество рабочих, которые добывают *Al*, тогда (60–x) – количество рабочих, добывающих *Ni*. Для второй шахты: y – количество рабочих, которые добывают *Al*, тогда (260–y) – количество рабочих, добывающих *Ni*. Дополненная таблица имеет вид:

№ шахты	Всего рабочих	r	*Al*			*Ni*		
			n	p	$r \cdot n \cdot p$	n	p	$r \cdot n \cdot p$
1	60	5	x	2	$10x$	60–x	3	$5 \cdot (60 - x) \cdot 3$
2	260	5	y	3	$15y$	260–y	2	$5 \cdot (260 - y) \cdot 2$
Всего на двух шахтах					$10x+15y$			$3500 - 15x - 10y$

Так как для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля, то масса алюминия в сплаве в 2 раза больше массы никеля, то есть:

$$10x+15y=2 \cdot (3500 - 15x - 10y),$$

$$40x+35y=7000.$$

Откуда:

$$x=175-\frac{7}{8}y, \tag{1.1}$$

или:

$$y=200-\frac{8}{7}x.$$

Учтем ограничения на переменные:

$$(1)\begin{cases} x=175-\frac{7}{8}y\geq 0 \\ x=175-\frac{7}{8}y\leq 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 131\frac{3}{7}\leq y\leq 200 \\ 0\leq y\leq 260 \end{cases} \Rightarrow y_{max}=200,$$

$$(2)\begin{cases} y=200-\frac{8}{7}x\geq 0 \\ y=200-\frac{8}{7}x\leq 260 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -52\frac{1}{2}\leq x\leq 175 \\ 0\leq x\leq 60 \end{cases} \Rightarrow 0\leq x\leq 60.$$

В системе (1) произошло сужение исходных (заданных в условии задачи) ограничений на переменную y, что позволило определить максимальное значение y. В системе (2) такого сужения исходных ограничений на переменную x не произошло.

Составим функцию $f(x,y)$, которая задает значения массы сплава. Для этого заметим, что масса сплава (на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля) в 3 раза больше массы никеля, следовательно:

$$f(x,y)=3\cdot(3500-15x-10y).$$

Подставим (1.1) вместо x:

$$f(y)=3\cdot\left(875+\frac{25}{8}y\right).$$

Подставляем $y_{max}=200$:

$$f(200)=45000\,кг.$$

Комментарий. Отношение масс металлов в сплаве позволяет составить уравнение, которое впоследствии разрешается относительно одной из переменных. Какую именно переменную выражать через другую, определяем из факта сужения исходных ограничений на переменную, который следует из решения систем ограничений. Так, в вышеописанной задаче для функции $f(x,y)$ переменная x была заменена на выражение от y.

При составлении функции $f(x,y)$ снова используется информация из условия задачи об отношениях масс в сплаве, но теперь уже значение $f(x,y)$ считается как количество всех частей в этом отношении.

Пример 2. В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение. На основе данных задачи составим таблицу:

№ области	Всего рабочих	r	*Al*			*Ni*		
			n	p	$r\cdot n\cdot p$	n	p	$r\cdot n\cdot p$
1	50	10		0,2			0,1	
2	50	10						

Так как требуется распределить рабочих в каждой шахте так, чтобы произвести наибольшее количество сплава, то вводим переменные: для первой шахты x – количество рабочих, которые добывают Al, тогда $(50–x)$ – количество рабочих, добывающих Ni. Для второй шахты: y – количество рабочих, которые добывают Al, тогда $(50–y)$ – количество рабочих, добывающих Ni. Дополняем таблицу:

№ области	Всего рабочих	r	Al			Ni		
			n	p	$r\cdot n\cdot p$	n	p	$r\cdot n\cdot p$
1	50	10	x	0,2	$2x$	$50–x$	0,1	$50-x$
2	50	10	y			$50–y$		

Так как во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, то вид зависимости между человеко-часами и массой добываемого в день металла имеет вид $(rn)^2=rnp$ или $rn=\sqrt{rnp}$. Учитывая это, получаем окончательный вид таблицы:

№ области	Всего рабочих	r	Al			Ni		
			n	p	$r\cdot n\cdot p$	n	p	$r\cdot n\cdot p$
1	50	10	x	0,2	$2x$	$50–x$	0,1	$50-x$
2	50	10	y		$\sqrt{10y}$	$50–y$		$\sqrt{10(50-y)}$
Всего в двух областях					$2x+\sqrt{10y}$	$50-x+\sqrt{10(50-y)}$		

Так как для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 2 кг никеля, то масса никеля в сплаве в 2 раза больше массы алюминия, то есть:

$$50-x+\sqrt{10(50-y)}=2\cdot(2x+\sqrt{10y}),$$

$$x=10+\frac{\sqrt{500-10y}}{5}-\frac{2\sqrt{10y}}{5}. \qquad (2.1)$$

Составим функцию $f(x,y)$, которая задает значения массы сплава. Масса сплава в 3 раза больше массы алюминия, следовательно:

$$f(x,y)=3\cdot(2x+\sqrt{10y}).$$

Подставим (2.1) вместо x:

$$f(y)=60+\frac{6}{5}\sqrt{500-10y}+\frac{3}{5}\sqrt{10y}.$$

Чтобы узнать наибольшее значение составленной функции, воспользуемся аппаратом математического анализа. Найдем производную $f'(y)$:

$$f'(y)=\frac{3\sqrt{500-10y}-6\sqrt{10y}}{\sqrt{10y(500-10y)}}.$$

Наибольшее значение функция принимает в точках экстремума, в которых производная равна нулю:

$$f'(y)=\frac{3\sqrt{500-10y}-6\sqrt{10y}}{\sqrt{10y(500-10y)}}=0\Leftrightarrow\begin{cases}3\sqrt{500-10y}-6\sqrt{10y}=0\\ y\neq 0, y\neq 50\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=10\\ y\neq 0, y\neq 50\end{cases}\Rightarrow y=10.$$

Определим знаки производной слева и справа от y=10:

$$f'(9)=\frac{\sqrt{41}-6}{\sqrt{410}}>0,$$

$$f'(11)=\frac{3(\sqrt{39}-\sqrt{44})}{\sqrt{4290}}<0.$$

Следовательно, $y=10$ – точка максимума, а значит $f(10)=90$ – наибольшее значение функции. Таким образом, завод при указанных условиях может производить не более 90 кг.

Пример 3. В двух областях есть по 90 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причем 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

Решение. На основе данных задачи составим таблицу:

№ области	Всего рабочих	r	*Al*			*Ni*		
			n	p	$r\cdot n\cdot p$	n	p	$r\cdot n\cdot p$
1	90	5		0,3			0,1	
2	90	5						

Так как алюминий и никель взаимозаменяемы и в первой области в час добывается больше алюминия, то логичным будет направить всех рабочих первой области на добычу алюминия. Теперь надо оптимально распределить рабочих во второй области. Пусть x – количество рабочих, которые добывают *Al*, тогда (90–x) – количество рабочих, добывающих *Ni*. Вид зависимости между человеко-часами и массой добываемого в день металла имеет вид $(rn)^2=rnp$ или $rn=\sqrt{rnp}$.

Исходя их этого, дополним таблицу:

№ области	Всего рабочих	r	*Al*			*Ni*		
			n	p	$r\cdot n\cdot p$	n	p	$r\cdot n\cdot p$
1	90	5	90	0,3	$90\cdot 5\cdot 0{,}3=135$	0	0,1	0
2	90	5	x		$\sqrt{5x}$	$90-x$		$\sqrt{5(90-x)}$
Всего в двух областях					$135+\sqrt{5x}$			$\sqrt{5(90-x)}$

Составим функцию $f(x)$:

$$f(x)=135+\sqrt{5x}+\sqrt{5(90-x)}.$$

Для нахождения ее наибольшего значения найдем нули производной:

$$f'(x)=\frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{5(90-x)}-\sqrt{5x}}{\sqrt{5x(450-5x)}}=0,$$

откуда $x=45$.

$$f'(46)=\frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{220}-\sqrt{225}}{\sqrt{50625}}<0,$$

$$f'(44)=\frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{230}-\sqrt{220}}{\sqrt{50600}}>0.$$

Следовательно, $x=45$ – точка максимума, а значит $f(45)=165$ – наибольшее значение функции. Таким образом, завод при указанных условиях может производить максимум 165 кг.

Сформулируем алгоритмы решения рассмотренных выше задач.

Примечание. Переменные вводятся для количества рабочих, добывающих тот или иной металл.

Анализ условия:

- **Производительность задана для двух объектов (область, шахта).**
- **В условии задано отношение масс металлов в сплаве.**

1. Вводятся две переменные.
2. Находится масса каждого металла, добываемого в день для каждого объекта.
3. Суммируются массы каждого металла, добытого в день на двух объектах.
4. Составляется уравнение, связывающее переменные, с учетом отношения масс металлов в сплаве.
5. Составляется функция массы сплава (функция двух переменных), в которой учитывается суммарное количество частей входящих в слав металлов.
6. Исследуются ограничения на переменные: в функции сплава остается та переменная, для которой произошло сужение области ее значений. Определяется ее максимальное значение и вычисляется наибольшее значение функции массы сплава.

Анализ условия:

- **Производительность задана только для одного объекта (область, шахта).**
- **Для второго объекта задается зависимость массы добытого металла в день от человеко-часов труда.**
- **В условии задано отношение масс металлов в сплаве.**

1. Вводятся две переменные.
2. Находится масса добытого в день того металла, для которого задана производительность.
3. Для металла, чья производительность не указана, его добытая в день масса определяется из ее зависимости от человеко-часов.
4. Суммируются массы каждого металла, добытого в день на двух объектах;
5. Составляется уравнение, связывающее переменные, с учетом отношения масс металлов в сплаве. Из этого равенства выражается «удобная» переменная.
6. Составляется функция массы сплава (функция двух переменных), в которой учитывается суммарное количество частей входящих в слав металлов. Подставляем в функцию выражение для «удобной» переменной, тем самым получаем функцию одного переменного.
7. Находится максимум функции массы сплава с помощью аппарата ***производной***, затем вычисляется наибольшее значение функции массы сплава.

Анализ условия:

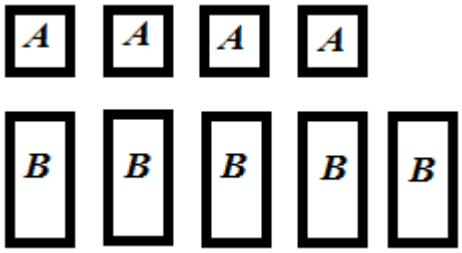
- **Производительность задана только для одного объекта (область, шахта).**
- **Для второго объекта задается зависимость массы добытого металла в день от человеко-часов труда.**
- **В условии указано, что металлы взаимозаменяемы.**

1. Для объекта, в котором задана производительность металла, определяется бóльшая производительность и все рабочие этого объекта направляются на добычу этого металла. То есть в этом объекте добывается только один металл.
2. Вводится переменная для второго объекта и масса добытого металла определяется из зависимости от человеко-часов.
3. Суммируются массы каждого металла, добытого в день на двух объектах.
4. Составляется функция массы сплава (функция одного переменного).

5. Находится максимум функции массы сплава с помощью аппарата ***производной***, затем вычисляется наибольшее значение функции массы сплава.

Пример 4. Баржа грузоподъемностью 134 тонны перевозит контейнеры типов *A* и *B*. Количество загруженных на баржу контейнеров типа *B* не менее чем на 25% превосходит количество загруженных контейнеров типа *A*. Вес и стоимость одного контейнера типа *A* составляет 2 тонны и 5 млн руб., контейнера типа *B* – 5 тонн и 7 млн руб. соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость (в млн руб.) всех контейнеров, перевозимых баржей при данных условиях.

Решение. Так как количество загруженных на баржу контейнеров типа *B* должно не менее чем на 25% превосходить количество загруженных контейнеров типа *A*, значит, на каждые 4 контейнера типа *A* должно приходиться не менее 5 контейнеров типа *B*. То есть можно объединить в группу контейнеры разных типов таким образом:



Пусть таких групп будет *k*. Тогда массу всех контейнеров типа *A* и массу всех контейнеров типа *B* можно описать выражениями:

$$4k\cdot 2=8k \text{ и } 5k\cdot 5=25k.$$

Тогда масса всех контейнеров: $8k+25k=33k$.

Ограничение по грузоподъемности баржи описывает неравенство:

$$33k\le 134, \text{ откуда } k\le 4\frac{2}{33}.$$

Так как $k\in N$, то $k=4$, а значит:

- количество контейнеров типа *A* определяем как $4k=16$;
- количество контейнеров типа *B* определяем как $5k=20$.

Суммарная стоимость всех контейнеров, перевозимых баржей при данных условиях:

$$16\cdot 5+20\cdot 7=220 \text{ млн руб.}$$

Целесообразно проверить на возможность получить более выгодный в финансовом плане вариант. Так как в найденном варианте масса всех контейнеров будет равна $33k=132$, то до предельной грузоподъемности можно заменить два контейнера типа *A* одним контейнером типа *B*. Тогда суммарная стоимость будет равна:

$$14\cdot 5+21\cdot 7=217 \text{ млн руб.},$$

что на 3 млн руб. меньше ранее найденного варианта.

Пример 5. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 21 $м^2$ и номера «люкс» площадью 49 $м^2$. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1099 $м^2$. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 руб в сутки, а номер «люкс» – 4500 руб в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

Решение. По условию задачи заполним таблицу:

	количество	площадь	стоимость в сутки
стандартный	x	21	2000
«люкс»	y	49	4500

Сумма денег, которую может заработать предприниматель, задается функцией: $S(x, y)=2000x+4500y$.

Определим ограничение для суммарной площади номеров:

$$21x+49y\le 1099, x, y\in N_0$$

Откуда:

$$y\le\frac{1099-21x}{49}.$$

Учитывая то, что $y\in N_0$, добавляем еще одно ограничение:

$$1099-21x\ge 49\Rightarrow x\le 50.$$

Аналогично из неравенства $21x+49y\le 1099$ получаем:

$$\begin{cases} x\le\dfrac{1099-49y}{21} \\ 1099-49y\ge 21 \end{cases}\Rightarrow y\le 22.$$

Рассмотрим крайние случаи:

$$x=50, \text{ тогда } y=\frac{1099-21\cdot 50}{49}=1 \text{ и } S(50,1)=104500.$$

$$y=22, \text{ тогда } x=\frac{1099-49\cdot 22}{21}=1 \text{ и } S(1,22)=101000.$$

Таким образом, наиболее выгодным вариантом является следующее распределение: один номер «люкс» и 50 стандартных номеров.

Пример 6. Часть денег от капитала 400 млн руб. размещена в банке под 12 % годовых, а другая часть инвестирована в производство, причем через год эффективность вложения ожидается в размере 250 % (то есть вложенная сумма x руб. оборачивается в размере 2,5x руб.), затем отчисляются деньги на издержки, которые задаются квадратичной зависимостью $0{,}0022x^2$. Прибыль от производства облагается налогом в 20 %. Как распределить капитал между банком и производством, чтобы через год получить максимальную прибыль от размещения денег в банк и вложения денег в производство? Сколько рублей составит эта прибыль?

Решение. Пусть x млн рублей инвестировано в производство, тогда $400-x$ млн рублей — размещено в банк.

Через год эффективность вложения в производства ожидается в размере $2{,}5x$ млн рублей.

Затем отчисляются деньги на издержки: $2{,}5x-0{,}0022x^2$

Прибыль от производства облагается налогом в 20 %:

$$0{,}8(2{,}5x-0{,}0022x^2-x)=2x-0{,}00176x^2$$

Через год сумма, размещенная в банк, будет равна:

$$1{,}12(400-x)=448-1{,}12x$$

Прибыль от размещения денег в банк и вложения денег в производство:

$$f(x)=2x-0{,}00176x^2+448-1{,}12x-400 \text{ или}$$

$$f(x)=-0{,}00176x^2+0{,}88x+48.$$

Наибольшее значение функция принимает в точке $x_0=\frac{0,88}{2\cdot 0,00176}=250$.

Тогда максимальная прибыль от размещения денег в банк и вложения денег в производство равна: $f(250)=-0,00176\cdot 250^2+0,88\cdot 250+48=158$.

Пример 7. Фермер для кормления животных использует два вида корма. В дневном рационе животного должно содержаться 6 единиц питательного вещества *A* и не менее 12 единиц питательного вещества *B*. Какое количество корма каждого вида надо расходовать ежедневно на одно животное, чтобы затраты были минимальными? Используйте данные таблицы.

Питательное вещество	Количество питательных веществ в 1 кг корма	
	Вид 1	Вид 2
A	2	1
B	2	4
Цена 1 кг корма (ден.ед.)	0,2	0,3

Решение. Введем переменные: пусть x кг корма *A* и y кг корма *B* расходуется ежедневно на одно животное. Тогда всего на одно животное ежедневно надо затратить $0,2x+0,3y$ рублей.

Дополним таблицу:

Питательное вещество	Вид 1		Вид 2		Всего в день
	Количество питательных веществ в 1 кг корма	Количество корма (кг) в день	Количество питательных веществ в 1 кг корма	Количество корма (кг) в день	
A	2	x	1	y	$2x+y=6$
B	2		4		$2x+4y\geqslant 12$
Цена 1 кг корма	0,2		0,3		
Целевая функция		$f(x;y)=0,2x+0,3y\to m\in$			

Из равенства $2x+y=6$ выразим переменную y: $y=6-2x$, подставим это выражение в неравенство и в целевую функцию. Составим систему ограничений:

$$\begin{cases} y=6-2x \\ 2x+4y\geqslant 12 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4(6-2x)\geqslant 12 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq 2 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$$

Целевая функция примет вид: $f(x)=1,8-0,4x\to min$. Наименьшее значение убывающая линейная функция принимает в максимальном значении переменной $x=2$, откуда $y=2$.

Следовательно, по 2 кг корма каждого вида надо расходовать ежедневно на одно животное, чтобы затраты были минимальными.

Пример 8. С завода на стройку на автомашине грузоподъемностью 10 тонн нужно перевести 24 больших бетонных блока массой по 3,6 тонн и 510 маленьких – по 0,2 тонны.

Грузовик вмещает 44 маленьких блока, а большой блок занимает место 14 маленьких. Найдите наименьшее число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

Решение. Введем переменные для определения количества маленьких и больших блоков:

x – количество больших блоков;

y – количество маленьких блоков.

Тогда ограничение по грузоподъемности автомашины выражает неравенство:

$$3{,}6x+0{,}2y\le 10, x, y\in N$$

откуда: $y\le 50-18x$.

Максимальное значение, которое может принимать x:

$$x_{max}=2\Rightarrow y=14.$$

24 больших блока по 2 штуки можно перевезти за 12 рейсов, при этом будет перевезено $14\cdot 12=168$ маленьких блока. Оставшиеся 342 маленьких блока можно перевезти за $342:44=7\frac{34}{44}$ рейса, то есть за 8 рейсов. Итого получаем $12+8=20$ рейсов.

Пример 9. Садовод привез на рынок 91 кг яблок, которые после транспортировки разделил на три сорта. Яблоки первого сорта он продавал по 40 руб, второго сорта – по 30 руб, третьего сорта – по 20 руб за килограмм. Выручка от продажи всех яблок составила 2170 руб. Известно, что масса яблок 2-го сорта меньше массы яблок 3-го сорта на столько же процентов, на сколько процентов масса яблок 1-го сорта меньше массы яблок 2-го сорта. Сколько килограммов яблок второго сорта продал садовод?

Решение. Введем переменные:

x – масса яблок первого сорта;

y – масса яблок второго сорта;

z – масса яблок третьего сорта, $x, y, z\in N$.

По условию масса всех яблок:

$$x+y+z=91.$$

По условию выручка от продажи всех яблок:

$$40x+30y+20z=2170.$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} x+y+z=91 \\ 40x+30y+20z=2170 \end{cases}$$

Откуда $2x+y=35$.

Так как $x<y, y<z$ на одно и тоже количество процентов, то

$$y=kx, z=ky.$$

Составляем систему:

$$\begin{cases} 2x+y=35 \\ y=kx \end{cases}\Rightarrow 2x+kx=35\Rightarrow x=\frac{35}{k+2}=\frac{5\cdot 7}{k+2}.$$

То есть, учитывая, что $x, y, z\in N$:

$$\left[\begin{array}{l} k=33 \\ k=3 \\ k=5 \end{array}\right.$$

Рассмотрим отдельно каждый случай:

$k=33, x=1, y=33, z=33^2\Rightarrow x+y+z>91,$

$k=5, x=5, y=25, z=125 \Rightarrow x+y+z>91,$

$k=3, x=7, y=21, z=63 \Rightarrow x+y+z=91, 40x+30y+20z=2170.$

Следовательно, 21 кг яблок второго сорта продал садовод.

Пример 10. Тимур приобрел ценную бумагу за 7 тысяч рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 3 тысячи рублей. По истечении любого числа лет Тимур может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счет. Каждый год сумма на счете будет увеличиваться на 10 %. По истечении скольких лет после покупки Тимур должен продать ценную бумагу, чтобы через 15 лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете стала наибольшей?

Решение. Введем обозначения:

S_0 – цена бумаги;

$\{S_k\}$ – последовательность наращенных сумм;

k – счетчик годов;

r_A – процент, на который происходит наращение стоимости ценной бумаги, если она хранится у Тимура (десятичное представление процента);

$r_Б$ – процент, на который происходит наращение стоимости ценной бумаги, если она хранится в банке (десятичное представление процента).

Для объяснения процесса удобно заполнить следующую таблицу:

k	$\{S_k\}$	r_A	$r_Б$	Сравнение r_A и $r_Б$
0	$S_0=7$	$\frac{S_1}{S_0}=\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}$ $r_A=\frac{3}{7}$	0,1	$r_A>r_Б$
1	$S_1=7+3=10$	$\frac{S_2}{S_1}=\frac{13}{10}=1\frac{3}{10}$ $r_A=\frac{3}{10}$		$r_A>r_Б$
2	$S_2=10+3=13$	$\frac{S_3}{S_2}=\frac{16}{13}=1\frac{3}{13}$ $r_A=\frac{3}{13}$		$r_A>r_Б$
3	$S_3=13+3=16$	$\frac{S_4}{S_3}=\frac{19}{16}=1\frac{3}{16}$ $r_A=\frac{3}{16}$		$r_A>r_Б$
…	…	…		…

Замечаем, что последовательность $\{S_k\}$ – возрастающая арифметическая прогрессия с разностью $d=3$, а процент $r_A=\frac{d}{S_k}$, где $S_k=S_1+d(k-1)$. На каждом шаге таблицы происходит сравнение r_A и $r_Б$. То есть решение задачи сводится к решению неравенства:

$$r_A=\frac{d}{S_k}\le r_Б$$

или

$$\frac{3}{10+3(k-1)}\le\frac{1}{10},$$

откуда:

$$k \geq 7\frac{2}{3}.$$

Учитывая, что $k \in N$, получаем ответ: по истечении 8 лет после покупки Тимур должен продать ценную бумагу, чтобы через 15 лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете стала наибольшей.

Пример 11. Иван положил в банк некоторую сумму денег на 4 года. Перед началом каждого года он выбирает одну из двух схем начисления прибыли в наступающем году:

1) к его счету прибавляется 10% от находящейся на счете суммы;

2) к его счету прибавляется 5% от находящейся на счете суммы и 50 тысяч рублей. Известно, что по прошествии 4 лет Иван максимально может получить 417967 рублей прибыли, если будет оптимально выбирать схему начисления прибыли. Сколько рублей положил на счет Иван? Если возможны несколько вариантов ответов, найдите хотя бы один.

Решение. Введем обозначения:

S_0 – первоначальная сумма;

n – период, на который Иван положил деньги в банк;

k – счетчик годов;

Σ_n – сумма, накопленная в банке за весь период накопления;

r_1 – процент банка по первой схеме (десятичное представление процента);

r_2 – процент банка по второй схеме (десятичное представление процента).

Для начала определим, какую из схем выгоднее выбрать первой:

По первой схеме после года хранения денег в банке:

$$S_0(1+r_1)=1{,}1 \cdot S_0.$$

По второй схеме после года хранения денег в банке:

$$S_0(1+r_2)+50=1{,}05 \cdot S_0+50.$$

Сравним их, сравнивая разность с нулем:

$$1{,}1 \cdot S_0 - 1{,}05 \cdot S_0 + 50 = 0{,}05 \cdot S_0 - 50 \lesseqgtr 0$$

$$S_0 \lesseqgtr 1000.$$

Если $S_0 < 1000$, то выгоднее выбрать вторую схему в первый год вклада.

Составим следующую таблицу (пусть первая схема – A, вторая – B):

k	Последовательности выбранных схем
1	B
2	BA или BB
3	BAA или BAB или BBA или BBB
4	$BAAA$ или $BAAB$ или $BABA$ или $BABB$ или $BBAA$ или $BBAB$ или $BBBA$ или $BBBB$

Составим уравнения для каждой схемы, считая $\Sigma_n - S_0 = 417{,}967$. Решив эти уравнения относительно $S_0 < 1000$, найдем наиболее выгодный вариант для S_0.

BAAA:

$(1{,}05 \cdot S_0 + 50) \cdot 1{,}1^3 - S_0 = 417{,}967$

$S_0 \approx 883{,}957$

BAAB:

$((1{,}05 \cdot S_0 + 50) \cdot 1{,}1^2) \cdot 1{,}05 + 50 - S_0 = 417{,}967$

$S_0 \approx 911{,}435$

BABA:

$$\left(\left(\left(1{,}05\cdot S_0+50\right)\cdot 1{,}1\right)\cdot 1{,}05+50\right)\cdot 1{,}1-S_0=417{,}967$$

$$S_0\approx 896{,}466$$

BABB:

$$\left(\left(\left(1{,}05\cdot S_0+50\right)\cdot 1{,}1\right)\cdot 1{,}05+50\right)\cdot 1{,}05+50-S_0=417{,}967$$

$$S_0\approx 932{,}118$$

BBAA:

$$\left(\left(1{,}05\cdot S_0+50\right)\cdot 1{,}05+50\right)\cdot 1{,}1^2-S_0=417{,}967$$

$$S_0=880$$

BBAB:

$$\left(\left(1{,}05\cdot S_0+50\right)\cdot 1{,}05+50\right)\cdot 1{,}1\cdot 1{,}05+50-S_0=417{,}967$$

$$S_0\approx 912{,}915$$

BBBA:

$$\left(\left(\left(1{,}05\cdot S_0+50\right)\cdot 1{,}05+50\right)\cdot 1{,}05+50\right)\cdot 1{,}1-S_0=417{,}967$$

$$S_0\approx 894{,}626$$

BBBB:

$$\left(\left(\left(1{,}05\cdot S_0+50\right)\cdot 1{,}05+50\right)\cdot 1{,}05+50\right)\cdot 1{,}05+50-S_0=417{,}967$$

$$S_0\approx 939{,}466$$

Таким образом, по схеме ***BBAA*** первоначальная сумма наименьшая и составляет 880 тысяч рублей.

Пример 12. Вкладчик положил две одинаковые суммы под r % годовых в банки A и B. Через год условия по вкладу в банке A изменились и он понизил годовую ставку до 10 % годовых, в то время как банк *Б* оставил годовую ставку на прежнем уровне. Найдите, при каком наименьшем целом r вклад в банке *Б* через 3 года будет по крайней мере на 20 % больше, чем вклад в банке A.

Решение. Используем обозначения, введенные в примере 9:

S_0 – первоначальная сумма;

n – период, на который вкладчик положил деньги в банк;

k – счетчик годов;

Σ_n – сумма, накопленная в банке за весь период накопления;

$\left(S_k\right)$ – последовательность наращенных сумм;

r – процент банка (десятичное представление процента).

По данным в условии задачи заполним следующую таблицу:

k	Банк A	Банк B
1	$S_1=S_0(1+r)$	$S_1=S_0(1+r)$
2	$S_2=S_0(1+r)\cdot 1{,}1$	$S_2=S_0(1+r)^2$
3	$S_3=S_0(1+r)\cdot 1{,}1^2$	$S_3=S_0(1+r)^3$
Σ_n	$S_0(1+r)\cdot 1{,}1^2$	$S_0(1+r)^3$

Так как вклад в банке *Б* через 3 года будет по крайней мере на 20 % больше, чем вклад в банке A, то решение задачи сводится к решению неравенства:

$$\frac{S_0(1+r)^3}{S_0(1+r)\cdot 1{,}1^2}\geq 1{,}2$$

$$\frac{(1+r)^2}{1{,}21} \geq 1{,}2$$

$$(1+r)^2 \geq 1{,}2 \cdot 1{,}21$$

Если взять $r = 0{,}21$, то получим истинное неравенство:

$$1{,}21^2 \geq 1{,}2 \cdot 1{,}21$$

Таким образом, наименьшее значение процентной ставки, при которой вклад в банке *Б* через 3 года будет по крайней мере на 20 % больше, чем вклад в банке *А*, равно 0,21 или 21 %.

Литература

1. ЕГЭ 2016. Математика. 50 вариантов типовых тестовых заданий / И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин и др.; под ред. И.В. Ященко. – М. : Издательство «Экзамен», 2016. – 247 с.

2. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2017. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года: учебно-методическое пособие / под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2016. – 384 с.

Методика обучения решению задач на оптимизацию во второй части ЕГЭ профильного уровня : сборник учебно-методических рекомендаций. – Биробиджан : ОГАОУ ДПО «ИПКПР», 2018. – 17 с.

Сверстано и отпечатано в РИО ОГАОУ ДПО «ИПКПР»
г. Биробиджан, ул. Пионерская, 53.