Областная олимпиада по математике
2019 год
Очный тур

Задание 1. (7 баллов) Решить уравнение $2\cos^6\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=4+\sin x+\sqrt{3}\cos x$.

Решение.

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cos x\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$2\cos^6\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=4+2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos^6\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$$

$$1\le 2+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 3$$

$$0\le\cos^6\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\le 1$$

Получается исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\cos^6\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1\\ 2+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\pm 1\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+\pi n\\ x=\frac{-5\pi}{6}+2\pi n\end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{-5\pi}{6}+2\pi n$

Задание 2. (7 балла) Упростите выражение $P_1+2P_2+3P_3+\ldots+nP_n$, где P_i- число перестановок из i элементов.

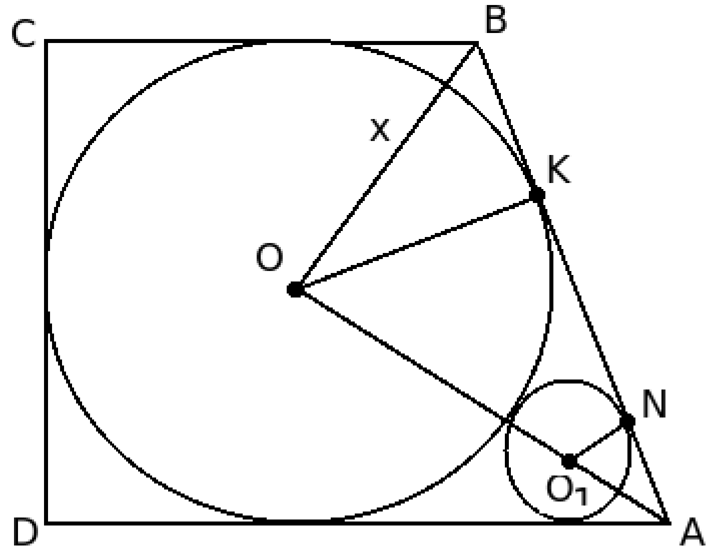
Решение:

Заметим: $1\cdot 1!=2!-1!;2\cdot 2!=3!-2!;3\cdot 3!=4!-3!;n\cdot n!=(n+1)!-n!$.

Складывая равенства, получим: $(n+1)!-1$.

Задание 3. (7 баллов) В прямоугольную трапецию $ABCD$ с углом A, равным $2\arccos\frac{15}{17}$ вписана окружность. Вторая окружность с радиусом $\frac{18}{25}$ касается сторон AB и AD трапеции и вписанной в нее окружности. Найдите площадь треугольника ABD.

Решение:



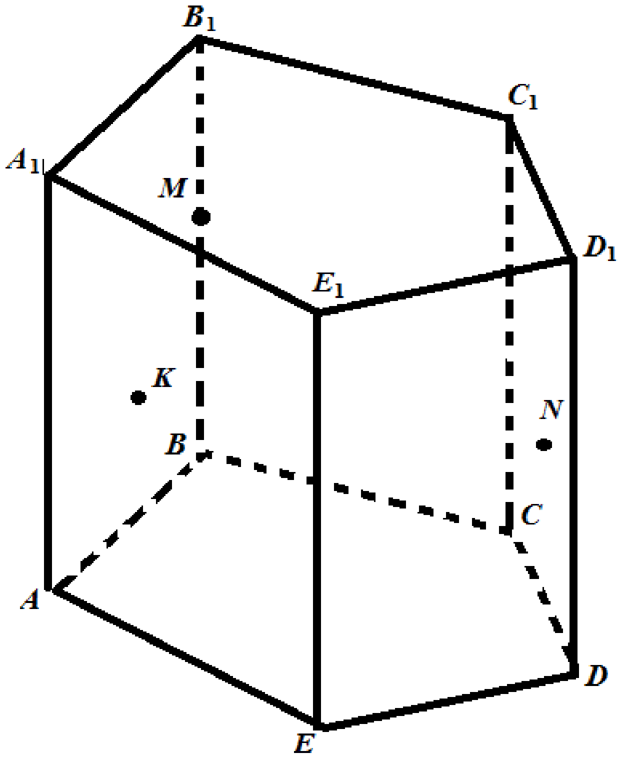
Решение: Пусть O - центр вписанной в трапецию окружности, O_1 - центр окружности, касающейся сторон AB и AD трапеции и вписанной в нее окружности. Пусть для определенности угол D прямой (случай с прямым углом B рассматривается аналогично). Точки K и N - точки касаний стороны AB окружностей с центрами в точках O и O_1 соответственно. Треугольник OAB прямоугольный, угол AOB равен $90°$ (AO и BO - биссектрисы углов A и B, сумма этих углов равна $180°$). Пусть $x = OB$, $\alpha = \angle OAB = \frac{\angle BAD}{2} = \arccos\frac{15}{17}$. Так как $OK \perp AB$, $\angle BOK = \alpha = \arccos\frac{15}{17}$, то $R = OK = x\cos\alpha = \frac{15}{17}x$ (R - радиус вписанной в трапецию окружности). В прямоугольном треугольнике OAB имеем: $AB = \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{17}{8}x$, $OA = \frac{x}{tg\alpha} = \frac{15}{8}x$. В прямоугольном треугольнике NAO_1 имеем: $AO_1 = \frac{r}{\sin\alpha} = \frac{153}{100} = 1{,}53$, r - радиус второй окружности из условия задачи, $r = \frac{18}{25} = 0{,}72$. Для отрезка OA получаем соотношение $OA = R + r + AO_1 = \frac{15}{17}x + 0{,}72 + 1{,}53$, следовательно, $\frac{15}{8}x = \frac{15}{17}x + 0{,}72 + 1{,}53$, $x = \frac{34}{15}$.

Найдем площадь треугольника ABD:

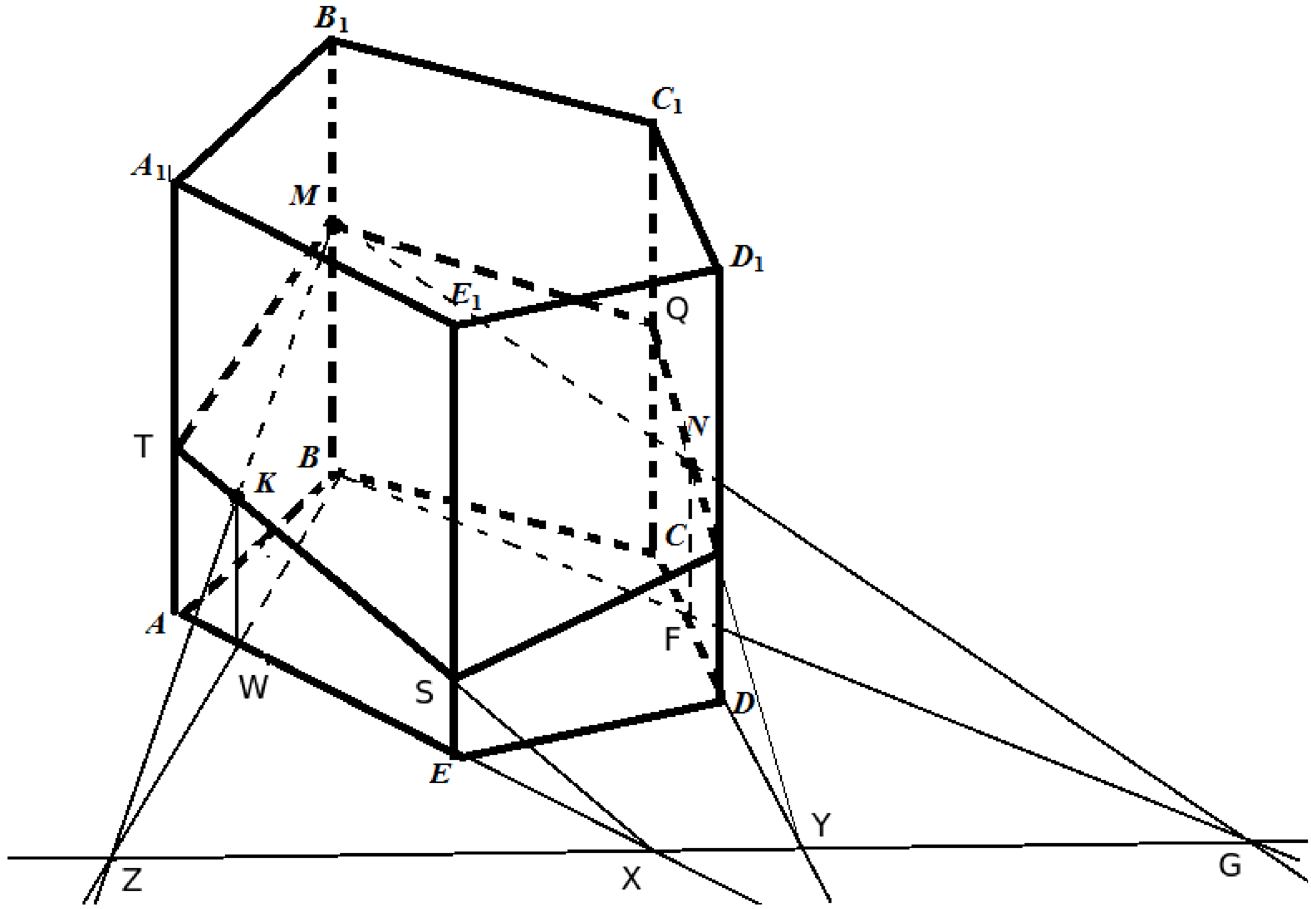
$$S_{ABD} = AD \cdot R = (AO\cos\alpha + R)R = R(\frac{15 \cdot 15}{8 \cdot 17}x + R) = 2(3{,}75 + 2) = 11{,}5.$$

Ответ: 11,5.

Задание 4. (7 баллов) Построить сечение многогранника плоскостью *MKN*, где $K \in AA_1E_1$, $N \in CC_1D_1$. Процесс построения описать с обоснованием.



Решение:



Задание 5. (7 баллов) Уголь, добываемый в пункте *A*, продается по цене *q* рублей за тонну, а добываемый в пункте *B* – на *p* % дороже. Пункты *A* и *B* соединяет дорога в *s* километров. В каком месте этой дороги расположены потребители угля, для которых закупка и доставка угля из *B* обходится дешевле, чем из *A*, если перевозка 1 тонны угля на расстояние 1 *км* обходится в *r* рублей? В каком месте дороги расположено предприятие, расходы которого на потребление угля не зависят от выбора пункта *A* или *B*?

Решение:

Пусть потребитель расположен на расстоянии *x км* от *B*. Тогда затраты на покупку и доставку 1 тонны угля из *A*: $r(s-x)+q$. Из *B*: $rx+q\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Составляем неравенство: $r(s-x)+q\le rx+q\left(1+\frac{p}{100}\right)\Rightarrow x\ge\frac{s}{2}-\frac{qp}{200r}$.

Если $\frac{s}{2}-\frac{qp}{200r}<0$, то при любом *x* затраты на доставку угля из *A* будут меньше, чем из *B*. Если $\frac{s}{2}-\frac{qp}{200r}\ge 0$, то при $x>\frac{s}{2}-\frac{qp}{200r}$ затраты на доставку угля из *A* будут меньше, чем из *B*, а при $x=\frac{s}{2}-\frac{qp}{200r}$ затраты не будут зависеть от выбора пункта *A* или *B*.