Областная олимпиада по математике
2019 год
Заочный тур

Задание 1.

1.1 Решить уравнение $4x^2+4x+17=\frac{12}{x^2-x+1}$.

Решение:

$$(4x^2+4x+1)+16=\frac{12}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+16=\frac{12}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4=\frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4\geq 4,$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\leq 4$$

Тогда уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4=4\\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{-1}{2}\\ x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Ответ: $\varnothing$.

1.2 Найдите все целочисленные решения системы:

$$\begin{cases}\sqrt{2}\sin\frac{\pi(y+4)}{8}=\sqrt{2\sin^2\frac{\pi x}{8}-2\sin^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}+2\cos\frac{\pi x}{4}},\\ |x|+|y-4|\leq 4,\quad y<x+2.\end{cases}$$

Решение:

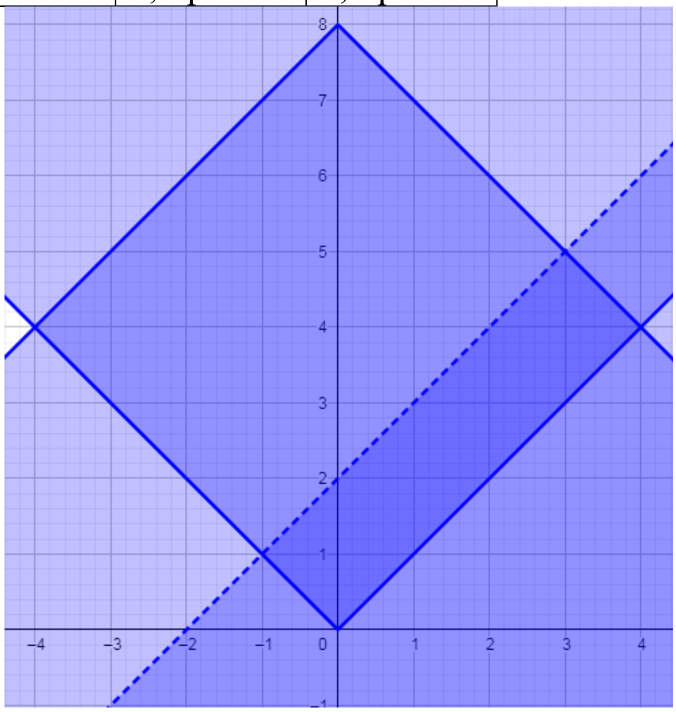
Рассмотрим уравнение системы $\sqrt{2}\sin\frac{\pi(y+4)}{8}=\sqrt{2\sin^2\frac{\pi x}{8}-2\sin^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}+2\cos\frac{\pi x}{4}}$. Оно равносильно уравнению $\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=\sqrt{2\sin^2\frac{\pi x}{8}+2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}}$ или $\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=\sqrt{1+2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}-\cos\frac{\pi x}{4}}$. При условии $\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}\geq 0$, т.е. при $-4+16k\leq y\leq 4+16k,\ k\in Z,$ имеем

$$2\cos^2\frac{\pi y}{8}-1-2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}=0 \iff \left(2\cos^2\frac{\pi y}{8}-1\right)\left(1-\cos\frac{\pi x}{4}\right)=0 \iff$$

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=1 \text{ или } \cos\frac{\pi x}{4}=1 \iff y=2+16k,\ y=-2+16k,\ k\in Z, \text{ или } x=8n,\ n\in Z.$$

Целочисленными решениями системы будут точки $(l;\,2+16k),\ (l;\,-2+16k),\ (8n;\,m),\ l,k,n,m\in Z,\ -4+16s\le m\le 4+16s,\ s\in Z$, лежащие в квадрате с центром в точке $(0;\,4)$, стороной $4\sqrt{2}$, диагоналями параллельными осям координат и в полуплоскости $y<x+2$.

x	0, при n=0	0, при n=0	1, при l=1	l=1
y	0, при m=0	1, при m=1	2, при k=0	2, при k=0



Ответ: (0;0), (0;1), (1;2), (2;2).

Задание 2.

2.1. Лифт, в котором 9 пассажиров, может останавливаться на десяти этажах. Пассажиры могут выходить по два, три и четыре человека. Сколькими способами это может произойти?

Решение:

Число способов, которыми 3 фиксированные группы пассажиров могут быть распределены по 10 этажам равно A_{10}^3 .Способов группировки по 2 человека - C_9^2 , по 3 человека - C_9^3 , по 4 человека - C_9^4 .Тогда количество всех способов формирования групп - $A_{10}^3\cdot C_9^2\cdot C_7^3\cdot C_4^4=\frac{10!}{4}$.

Ответ: $\frac{10!}{4}$

2.2. «Ранним утром на рыбалку улыбающийся Игорь мчался босиком». Сколько различных осмысленных предложений можно составить, используя часть слов этого предложения?

Решение:

Пронумеруем фразы предложения и слова в них:

«Ранним(1) утром(2)» - I; «на рыбалку» - II; «улыбающийся(1) Игорь(2)» - III; «мчался(1) босиком(2)» - IV.
В каждом осмысленном предложении обязательно будет присутствовать III или III.2 (два варианта) вместе с IV или IV.1 (два варианта). I может присутствовать целиком, или I.2, или отсутствовать (3 варианта). II может отсутствовать или присутствовать (2 варианта). Таким образом: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$ Один из 24 вариантов совпадает с исходным, следовательно, окончательный ответ — 23.
Ответ: 23.

Задание 3.

Решить неравенство $\dfrac{x^2-4x-5}{x-\left(4-2^{1-a^2}\right)} \leq 0$.

Решение:

Воспользуемся методом интервалов. Числитель дроби в левой части неравенства обращается в нуль при $x=-1$ и $x=5$, знаменатель — при $x=4-2^{1-a^2}$.

Изучим, при каких a нуль знаменателя расположен между -1 и 5. Имеем:

$$4-2^{1-a^2}<5 \Leftrightarrow 2^{1-a^2}>-1 \Leftrightarrow a \in \boldsymbol{R},$$

$$4-2^{1-a^2}>-1 \Leftrightarrow 2^{1-a^2}<5 \Leftrightarrow a \in \boldsymbol{R}.$$

Полученные значения разбивают всю числовую прямую на промежутки с концами 1, $4-2^{1-a^2}$ и 5. Если $x>5$, то дробь положительна, и она меняет знак при переходе через каждую из отмеченных точек, стало быть, при любом $a \in \boldsymbol{R}$ множеством решений неравенства будет $(-\infty; -1] \cup \left(4-2^{1-a^2}; 5\right]$.

Задание 4.

4.1. Из пунктов A и B одновременно выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Когда первый проехал половину пути, второму осталось проехать до пункта A 72 км, а когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать до пункта B 45 км. На каком расстоянии от пункта A велосипедисты встретились?

Решение:

Пусть расстояние $AB=S$, скорость первого – x, второго – y, расстояние от A до места встречи – s. Тогда составляем уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{2x}=\dfrac{S-72}{y} \\ \dfrac{S}{2y}=\dfrac{S-45}{x} \\ \dfrac{s}{x}=\dfrac{S-s}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{Sy}{2(S-72)} \\ y=\dfrac{Sx}{2(S-45)} \\ \dfrac{s}{x}=\dfrac{S-s}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S^2-156S+4320=0, S=120 \\ \dfrac{60}{x}=\dfrac{48}{y} \\ \dfrac{s}{x}=\dfrac{120-s}{y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} S=120 \\ x=\dfrac{5y}{4} \\ \dfrac{4s}{5}=120-s \end{cases} \Rightarrow s=66\frac{2}{3}$$

Ответ: $66\frac{2}{3}$

4.2. Какое наименьшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_{35}=2$, а $a_{40}=17$?

Решение: Если a – первый член и d – разность арифметической прогрессии,

$$\begin{cases} a+34d=2, \\ a+39d=17 \end{cases} \Leftrightarrow d=3,\ a=-100.$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наименьшее значение, если $a_n<0$, а $a_{n+1}\ge 0$. Так как $a_n=a+d(n-1)$, то из неравенства $-100+3(n-1)<0$ найдем $n=[103/3]=34$.

Тогда $\min S_n=S_{34}=0{,}5\cdot(-100-100+3\cdot 33)\cdot 34=-1717$.

Ответ: -1717**.**

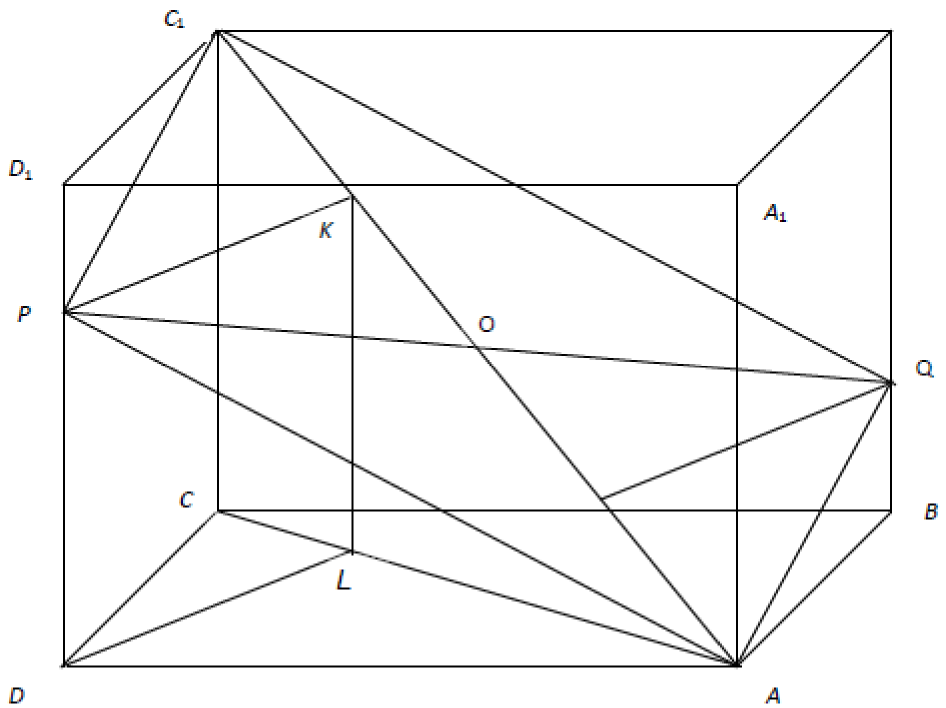
Задание 5.

5.1. Точки *A,B,C,D* лежат на окружности, *AC* является биссектрисой угла *DAB* и пересекает *DB* в точке *K*. Найдите *BC*, если известно, что *AK*=9, *KC*=3.

5.2. Построить сечение треугольной пирамиды *PABC* плоскостью *MNQ*, где $Q\in AP,\ M\in(PBC),\ N\in(ABC)$. Процесс построения описать с обоснованием.

5.3. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите длины сторон основания параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 6 и $2\sqrt{3}$, а угол между ними 30^0.

Решение:



Проведем $DL \perp AC$, $LK \| CC_1$ $(K \in AC_1)$, $PK \| DL$. Откладывая на боковом ребре BB_1 отрезок $BQ=PD_1$, получаем параллелограмм $PAQC_1$, который будет сечением наименьшей площади; при этом AC_1–его большая, а PQ –меньшая диагонали, заданные в условии.

$$AC_1 = 6, \quad PQ = 2\sqrt{3}, \quad \varphi = 30^\circ, \quad \sin\varphi = 1/2, \quad \cos\varphi = \sqrt{3}/2.$$

$$DL = PK = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad OK = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$$

$\dfrac{CL}{AL} = \dfrac{C_1K}{AK} = \dfrac{C_1O - OK}{C_1O + OK} = \dfrac{3 - 3/2}{3 + 3/2} = \dfrac{1}{3}$. Пусть $CL = x$, тогда $AL = 3x$.

$DL^2 = CL \cdot AL$, т.е. $\dfrac{3}{4} = 3x^2$, $x = \dfrac{1}{2}$, $CL = \dfrac{1}{2}$, $AL = \dfrac{3}{2}$. Тогда $CD = \sqrt{DL^2 + CL^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}} = 1$,

$$AD = \sqrt{DL^2 + AL^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}.$$

Ответ: $1; \sqrt{3}$.