Стереометрия

14 **В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Точка M — середина ребра B_1C_1, точка N лежит на ребре AC, причём $AN : NC = 15 : 1$. Катет AC в четыре раза больше бокового ребра AA_1 призмы.**

а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна прямой CA_1.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью основания $A_1B_1C_1$, если $\cos\angle CBA = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

а) Перпендикулярность скрещивающихся прямых

- Параллельный перенос в одну плоскость
- **Теорема о трех перпендикулярах**

Так как скрещивающиеся, то одна «наклонная», другая «прямая».
Перпендикуляр перпендикулярен плоскости, где расположена прямая.
Таким образом, C_1M – перпендикуляр, A_1C – прямая, MN- наклонная, NC_1 – проекция.

Выносной чертеж

Подобие треугольников ACC_1 и NCC_1 (угол и две пары пропорциональных катетов). Откуда равенство углов – CA_1C_1 и NC_1C.
Сумма углов треугольника A_1OC.

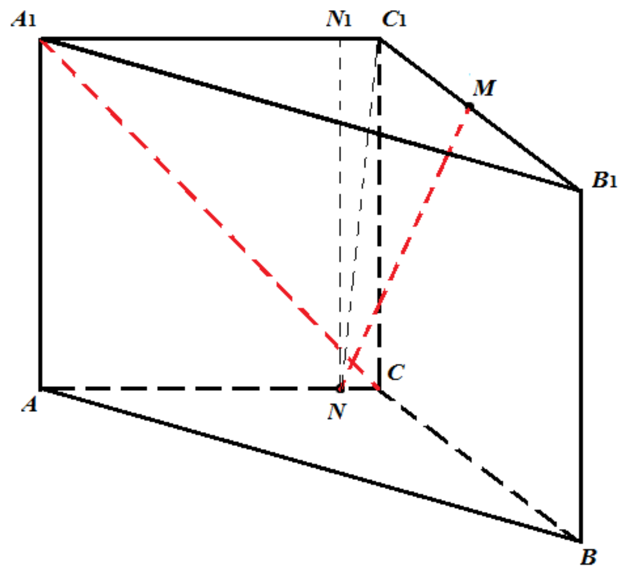
б) Угол между прямой и плоскостью – N_1NM.

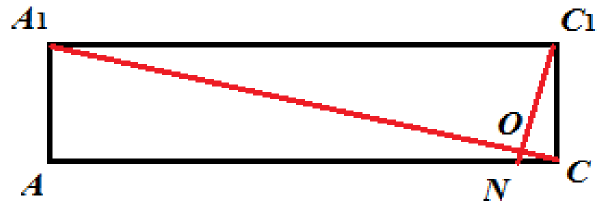
$$tg\angle N_1NM = \frac{N_1M}{N_1N}$$

Из треугольника N_1MC_1 найти N_1M.

Применить тождество $1 + tg^2\angle B = \frac{1}{cos^2\angle B}$ и найти C_1M.

Примечание. В задачах, где дан $sinCBA$ применить $1 + ctg^2\angle B = \frac{1}{sin^2\angle B}$

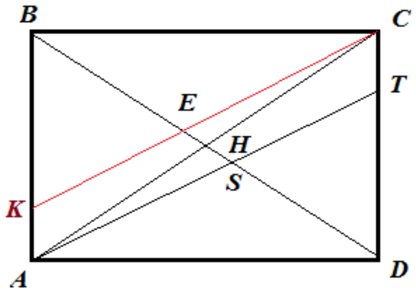




14 **В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 3$ и диагональю $BD = 5$. Все боковые рёбра пирамиды равны 3. На отрезке BD отмечена точка E, а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 2$.**
а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.
б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

а) Параллельность прямой и плоскости – параллельность прямой и прямой, лежащей в плоскости.
Строим сечение, используя тот факт, что если прямая проходит через точку плоскости, параллельно другой прямой, принадлежащей плоскости, то она также лежит в этой плоскости.
Установим параллельность прямой BS и KF.

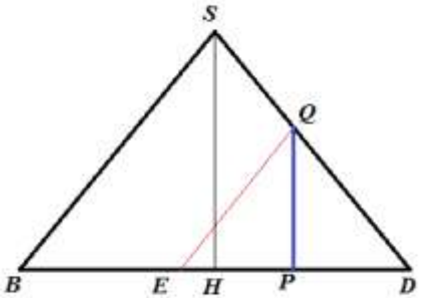
Выносной чертеж



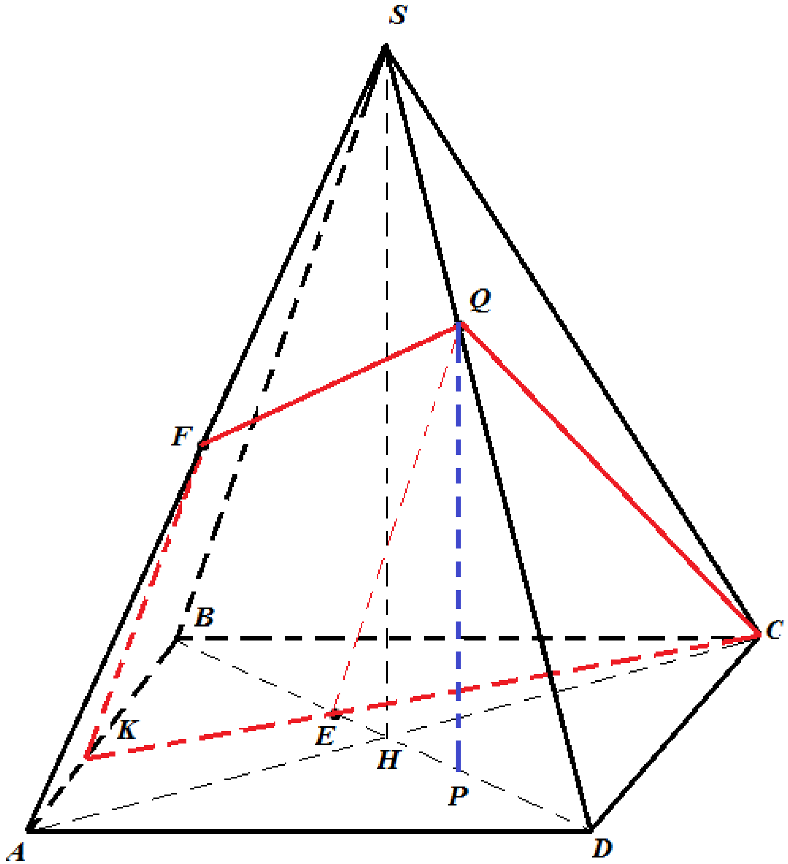
AT параллельно KC. Треугольник ABS – равнобедренный. По теореме Фалеса AK=1.
$AK=AF$, $FS=KB$.
$FK \parallel SB$

б) Определим положение Q.

Выносной чертеж



По теореме Пифагора находим SH.
Из того, что $EQ \parallel SB$, находим по теореме Фалеса отношение QD к QS.
В таком же отношении PD и SH.



14 Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P принадлежит ребру BB_1, причём $BP : PB_1 = 1 : 3$.

а) Пусть M — середина A_1C_1. Докажите, что прямые MP и AC перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP.

а) Перпендикулярность скрещивающихся прямых

- Параллельный перенос в одну плоскость
- **Теорема о трех перпендикулярах**

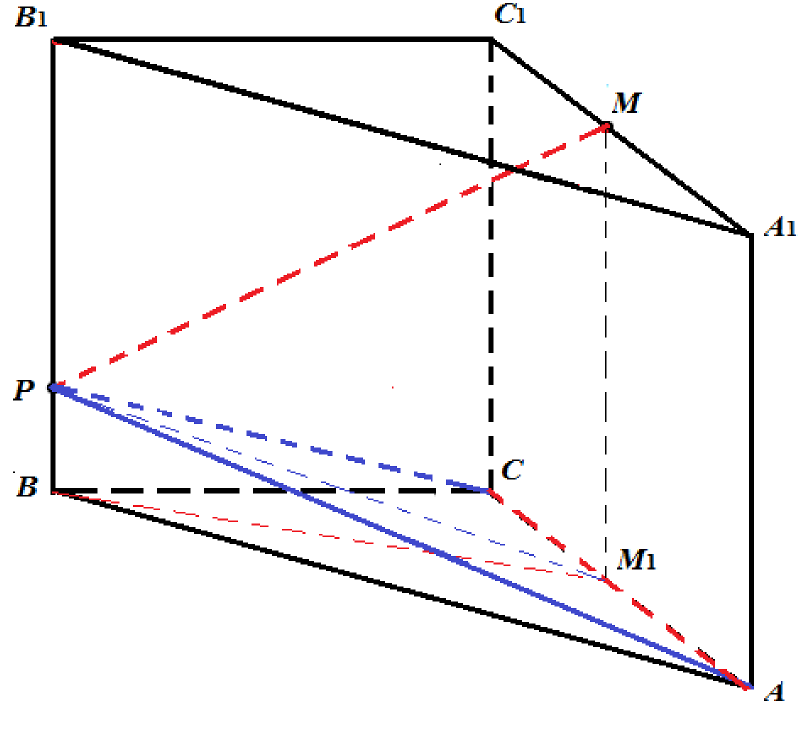
Так как скрещивающиеся, то одна «наклонная», другая «прямая».

Перпендикуляр перпендикулярен плоскости, где расположена прямая.

Таким образом, M_1M – перпендикуляр, AC – прямая, PM - наклонная, BM_1 – проекция (медиана в равнобедренном треугольнике, проведенная к основанию).

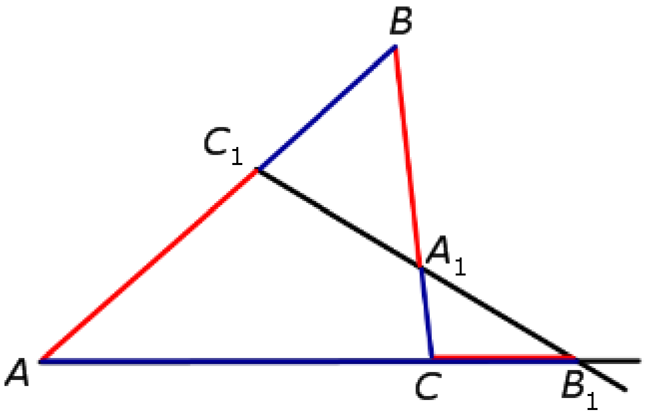
б) Угол между плоскостями – угол PM_1B.

$$tg\angle PM_1B = \frac{PB}{M_1B}$$



Теорема Менелая

Если на сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и A_1, а точка B_1 взята на продолжении стороны AC за точку C (рис.1), то точки C_1, A_1 и B_1 лежат на одной прямой **тогда и только тогда**, когда выполнено равенство



$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1 \qquad (1)$$

***Доказательство необходимости*.**

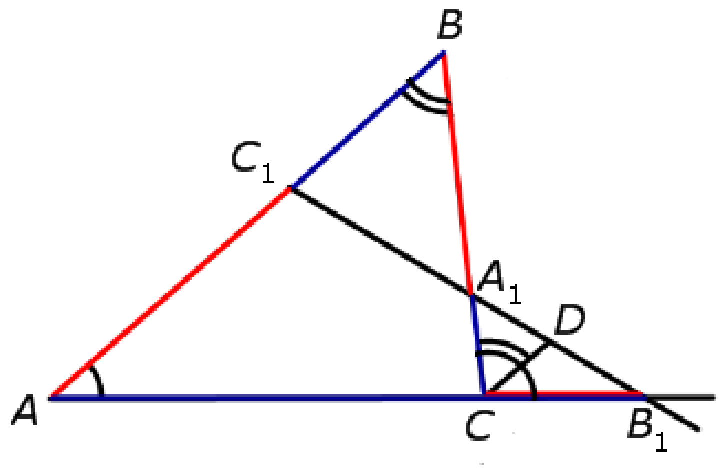
Если **точки C_1, A_1 и B_1 лежат на одной прямой**, то выполнено равенство (1).

$CD \parallel AB$. Треугольник AC_1B_1 подобен треугольнику CDB_1:

$$\frac{AC_1}{AB_1}=\frac{CD}{CB_1}.$$

Треугольник C_1BA_1 подобен треугольнику A_1DC:

$$\frac{BA_1}{BC_1}=\frac{A_1C}{CD}.$$



$$\frac{AC_1}{AB_1}\cdot\frac{BA_1}{BC_1}=\frac{CD}{CB_1}\cdot\frac{A_1C}{CD}\;\Rightarrow\;\frac{AC_1}{AB_1}\cdot\frac{BA_1}{BC_1}=\frac{A_1C}{CB_1}\;\Rightarrow\;\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Доказательство достаточности.

Если **выполнено равенство (1)**, то точки C_1, A_1 и B_1 лежат на одной прямой.

Пусть $B_1A_1 \cap AB = C_2$. Так как точки C_2, A_1 и B_1 лежат на одной прямой, то

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

По условию $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Поделим равенства:

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{C_1B}{AC_1} = 1$$

откуда

$$\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{AC_1}{C_1B}$$

Пусть $AC_1 = x, AC_2 = y, AB = c$, тогда

$$\frac{y}{c-y} = \frac{x}{c-x}$$

$$y(c-x) = x(c-y)$$

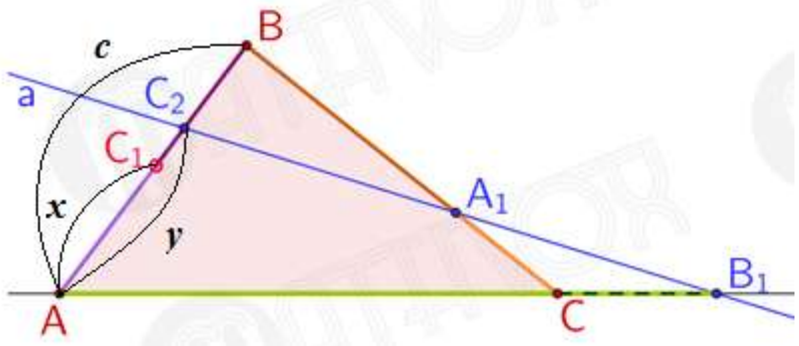
$$yc - yx = xc - xy$$

$$yc = xc$$

$$y = x$$

$$AC_1 = AC_2$$

$$C_1 = C_2$$



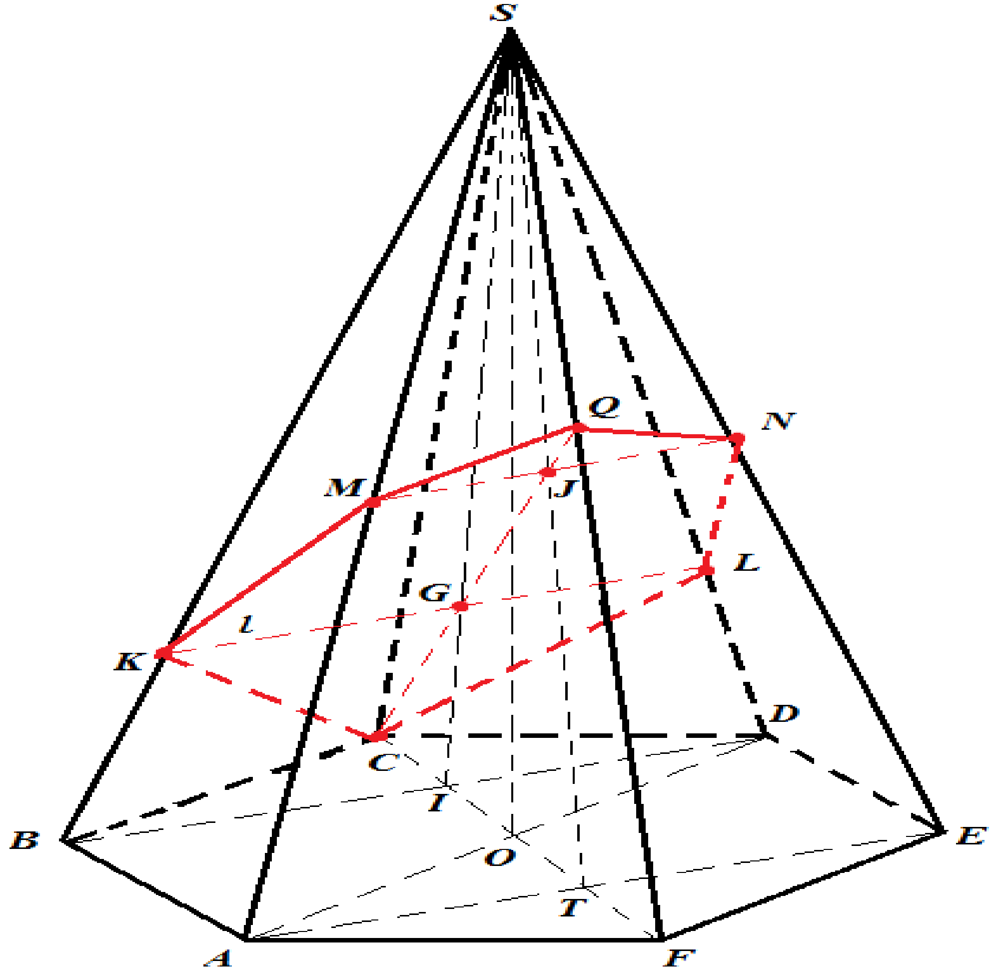
14 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C, делит ребро SB в отношении $1:3$, считая от вершины B.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S.

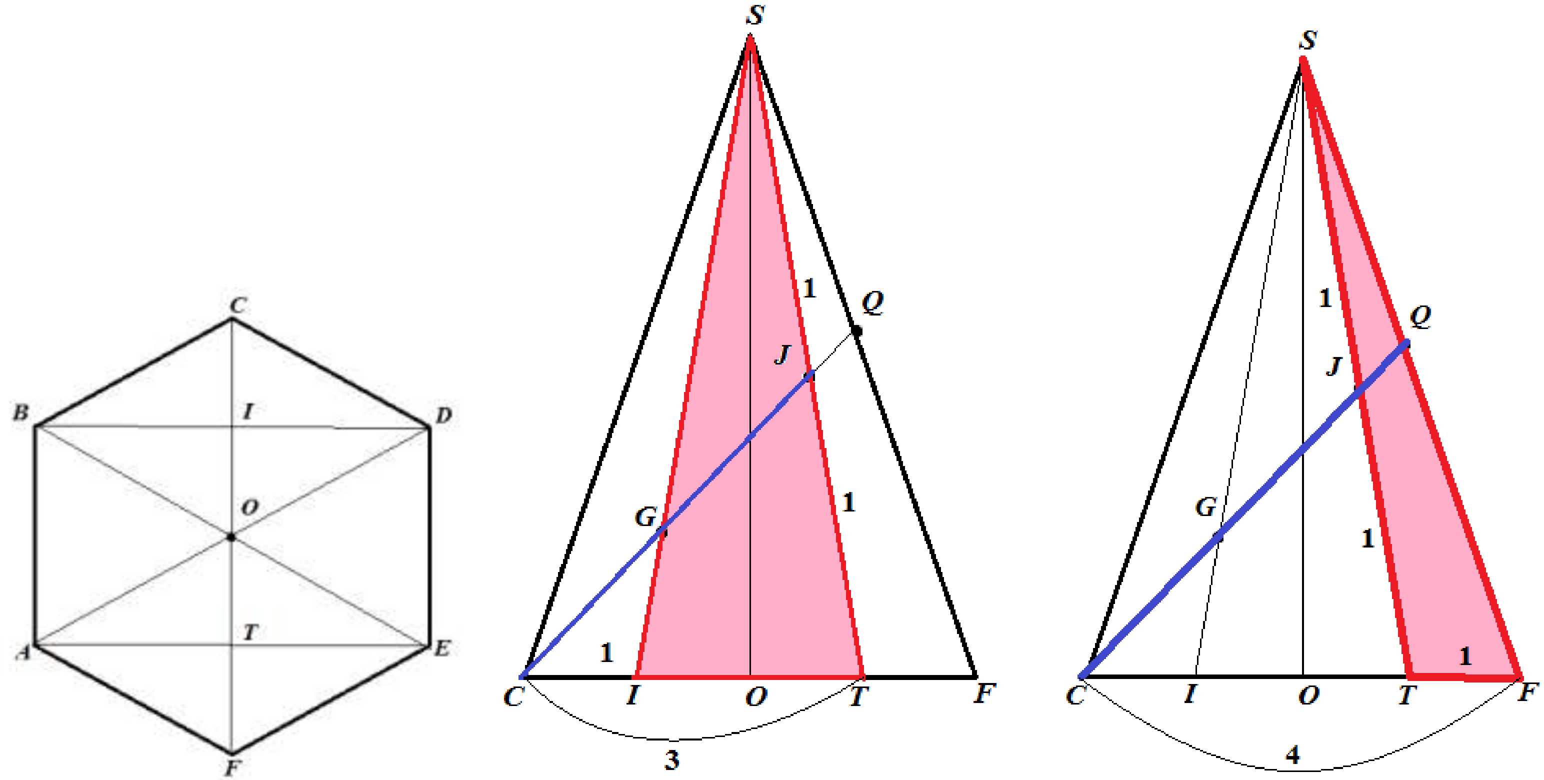
а) Построение сечения.

$$MN \in \alpha, MN \in (ASE) \Rightarrow \alpha \cap (ASE) = ST;$$
$$ST \cap MN = J \in \alpha$$
$$CJ \cap SF = Q \in \alpha;\ \alpha \cap (BSD) = SI$$
$$SI \cap CQ = G;\ G \ni l, l \parallel MN \Rightarrow l \in \alpha$$
$$l \cap SB = K \in \alpha, l \cap SD = L \in \alpha;$$
$$MQNLCK = \alpha \cap SABCDEF.$$



Определим положение *K*.

Выносной чертеж.



CI=*IO*=*OT*=*TF*.

Рассмотрим ΔIST и прямую *CJ*.

По теореме Менелая: $\frac{TJ}{JS}\cdot\frac{SG}{GI}\cdot\frac{IC}{CT}=1$, следовательно,

$\frac{1}{1}\cdot\frac{SG}{GI}\cdot\frac{1}{3}=1.$

Откуда $\frac{SG}{GI}=\frac{3}{1}$. По теореме Фалеса: $\frac{\boldsymbol{SK}}{\boldsymbol{KB}}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}}$.

б) Рассмотрим ΔTSF и прямую *CQ*.

По теореме Менелая: $\frac{FQ}{QS}\cdot\frac{SJ}{JT}\cdot\frac{TC}{CF}=1$,

следовательно, $\frac{FQ}{QS}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{4}=1.$

Откуда $\frac{FQ}{QS}=\frac{4}{3}$

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все рёбра которой равны 6, точка M — середина ребра BC, точка O — центр основания пирамиды, точка F делит отрезок SO в отношении $1:2$, считая от вершины пирамиды.

а) Найдите отношение, в котором плоскость CMF делит отрезок SA, считая от вершины S.

б) Найдите угол между плоскостью MCF и плоскостью ABC.

а) Построение сечения.

$$MF \in \alpha, MF \in (ASM) \Rightarrow \alpha \cap (ASM) = MF;$$

$$MF \cap AS = K \in \alpha$$

$$\alpha \cap (ABC) = BC;\ \alpha \cap (ASB) = KB;\ \alpha \cap (ASC) = KC$$

$$BKC = \alpha \cap SABC.$$

Выносной чертеж.

ΔASM – равнобедренный, $AM = MS = 3\sqrt{3}$.

$$AO:OM = 1:2.$$

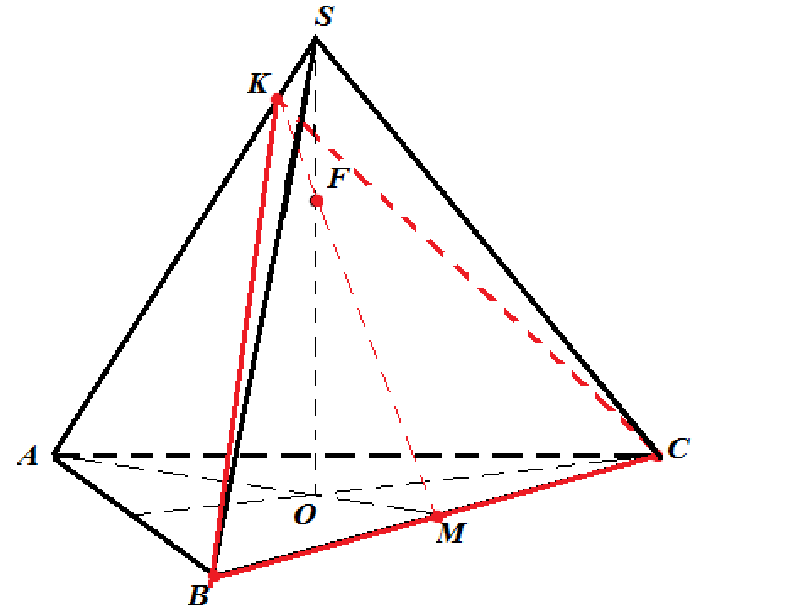
Рассмотрим ΔAOS и прямую MK. По теореме Менелая:

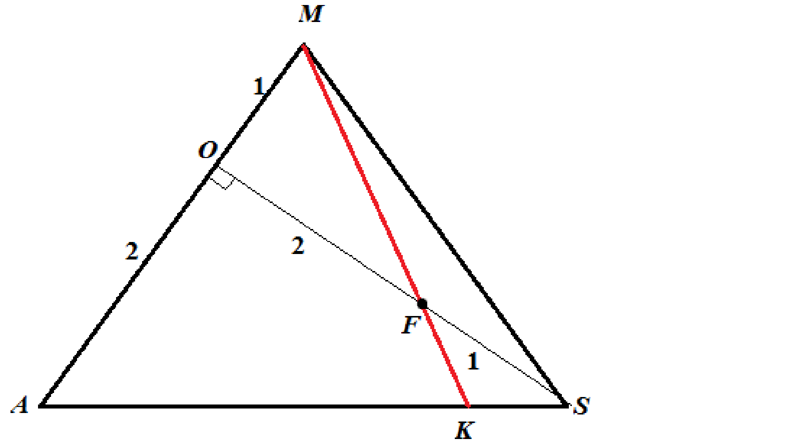
$$\frac{AK}{KS} \cdot \frac{SF}{FO} \cdot \frac{OM}{MA} = 1$$

$$\frac{AK}{KS} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \frac{AK}{KS} = \frac{6}{1}.$$

б) Из ΔOMF – прямоугольного

$$tg\angle OMF = \frac{OF}{OM} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{AS^2 - \left(\frac{2}{3}AM\right)^2}}{\frac{1}{3}AM}.$$





14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 8. Точка L — середина ребра SC. Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.

б) Найдите площадь поверхности пирамиды.

а) $LH \parallel SO \Rightarrow LH \perp (ABC), LH - \text{перпендикуляр}.$

$$LO - \text{наклонная}, OH - \text{проекция}.$$

$$BO \perp OH \Rightarrow BO \perp LO.$$

б) ΔOSC: OL – средняя линия, $SA \parallel LO$.

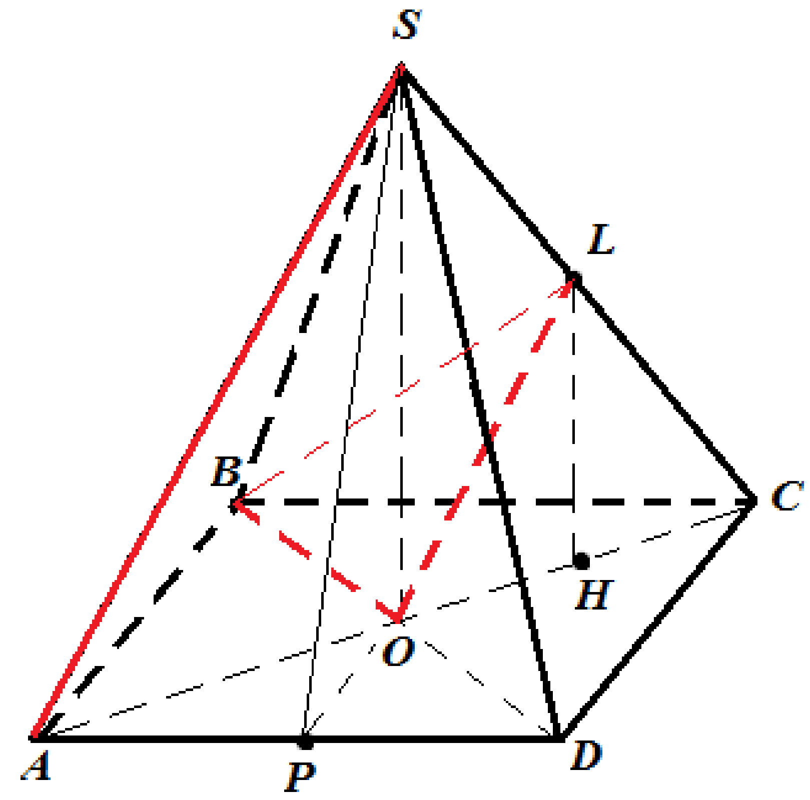
Следовательно,

$$tg(BL;SA) = tg(BL;LO) = tg\angle BLO = \frac{BO}{OL} \Rightarrow OL = 2\sqrt{5}.$$

$$SC = 2OL.$$

$$SP \perp AD; SP = \sqrt{SC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}.$$

$$S_{пов} = 4 \cdot \frac{1}{2} SP \cdot AB + AB^2.$$



14 Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$. Ребро MA перпендикулярно грани MBC. Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

$$AM = MC = MB = AC\sqrt{2}$$

$$MN = \sqrt{MS^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2};\ PN = \frac{1}{2}AB.$$

б) Метод объемов

$$CN \perp AN, CN \perp MN, CN \perp (AMN)$$

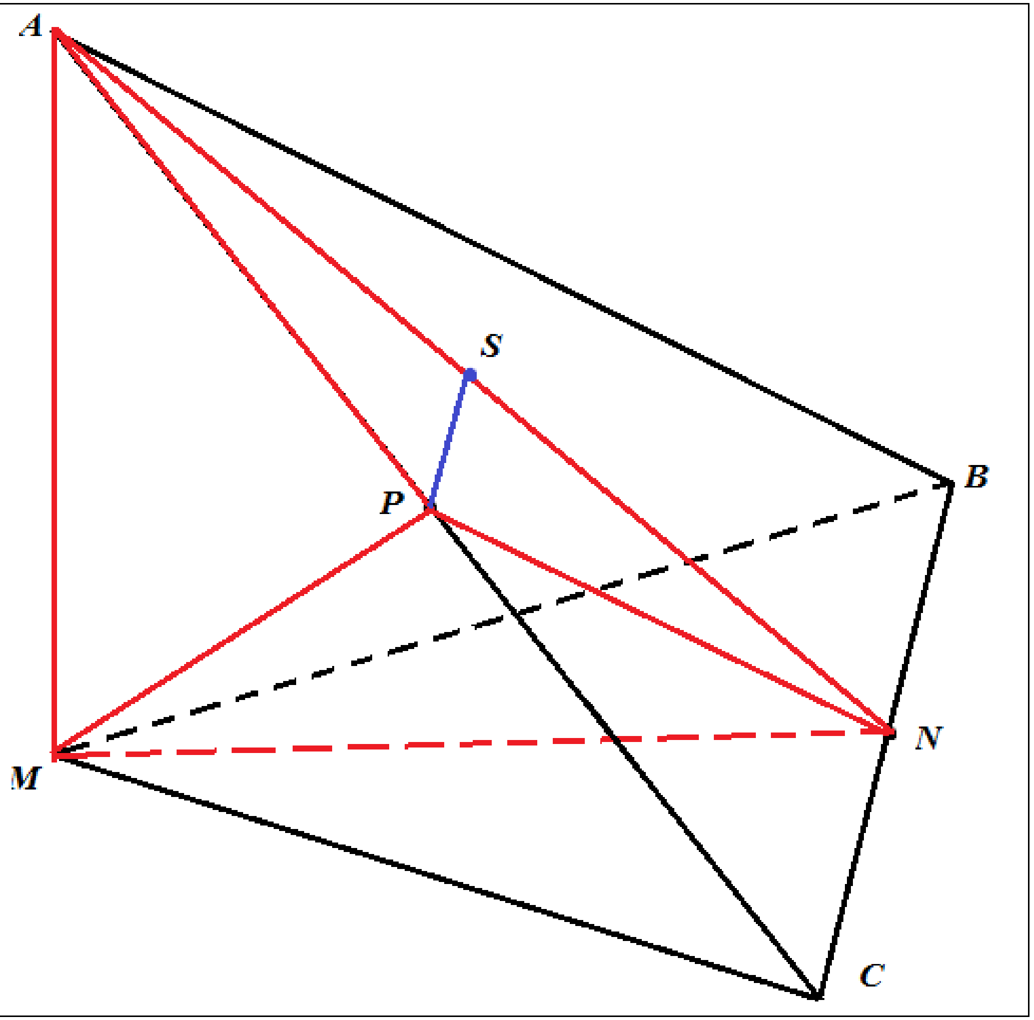
$$PS \parallel CN \Rightarrow PS \perp (AMN).$$

$$\boldsymbol{\rho(A;(MPN))} = h_{AMPN}$$

$$V_{AMPN} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNP} \cdot h_{AMPN} =$$

$$= V_{PAMN} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNP} \cdot h_{PAMN} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{MN \cdot AM}{2} \cdot PS.$$



14 Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$. Ребро MA перпендикулярно грани MBC. Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найти расстояние от точки C до плоскости MNP/

$$AM = MC = MB = AC\sqrt{2}$$

$$MN = \sqrt{MS^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2}\,; PN = \frac{1}{2}AB.$$

б) Метод объемов

$$MA \perp (MBC)$$

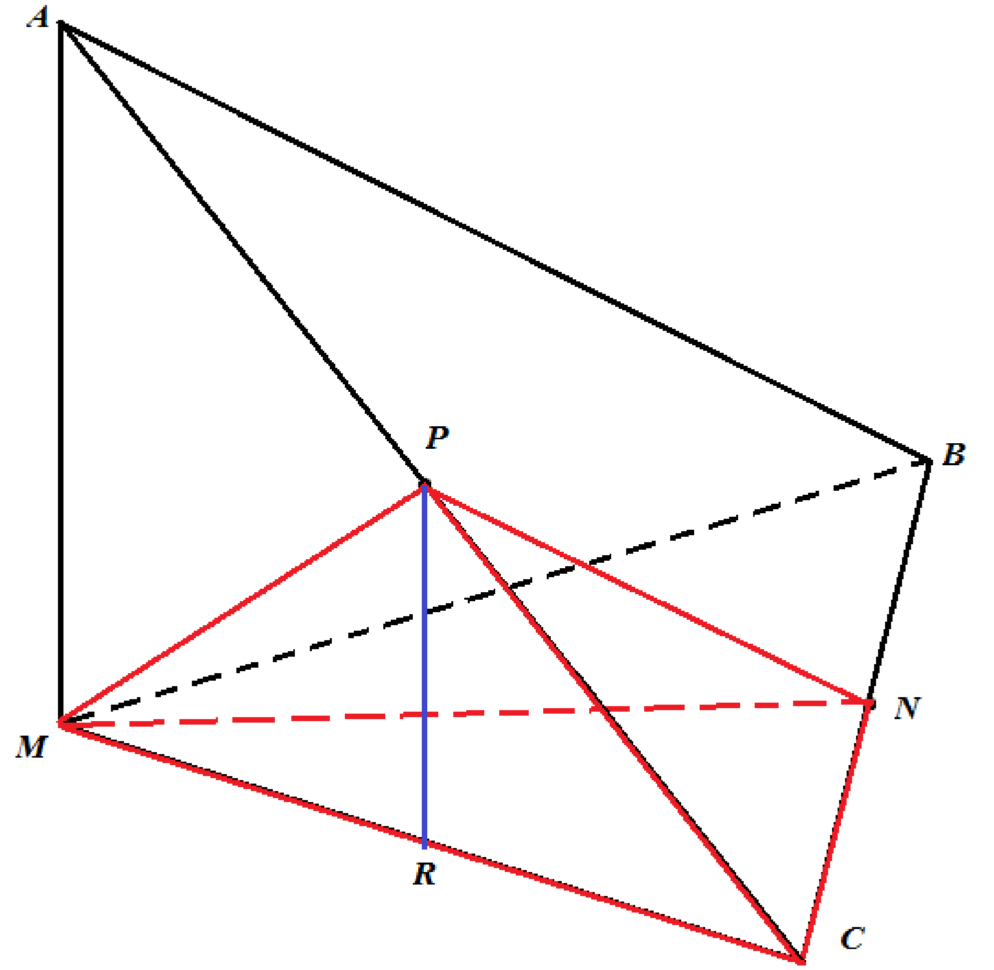
$$PR \parallel AM \Rightarrow PR \perp (MBC).$$

$$\boldsymbol{\rho(C;(MPN))} = h_{CMPN}$$

$$V_{CMPN} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNP} \cdot h_{CMPN} =$$

$$= V_{PCMN} = \frac{1}{3} \cdot S_{CMN} \cdot h_{PCMN} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{MN \cdot NC}{2} \cdot PR.$$



14 Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$. Ребро MA перпендикулярно грани MBC. Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найти расстояние от точки B до плоскости MNP.

$$AM = MC = MB = AC\sqrt{2}$$

$$MN = \sqrt{MS^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2}; PN = \frac{1}{2}AB.$$

б) Метод объемов

$$MA \perp (MBC)$$

$$PR \parallel AM \Rightarrow PR \perp (MBC).$$

$$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{B}; (\boldsymbol{MPN})) = h_{BMPN}$$

$$V_{BMPN} = \frac{1}{3} \cdot S_{MNP} \cdot h_{BMPN} =$$

$$= V_{PBMN} = \frac{1}{3} \cdot S_{BMN} \cdot h_{PBMN} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{MN \cdot NB}{2} \cdot PR.$$